ポントリャーギン

連続群論

下

柴岡泰光
杉浦光夫 共訳
宮崎功



岩波書店

ポントリャーギン

連続群論

下

柴岡泰光
杉浦光夫 共訳
宮崎 功

岩波書店

Л. С. ПОНТРЯГИН

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

目　次

第7章　リー群の概念

前章までの位相群の研究においては，我々は位相群に，抽象代数学及び位相空間論の用語で言表わし得る，極めて一般的な条件のみを課して来たのであった．しかしながら，**リー群**の概念は，既にその定義において，その群乗法を定義する函数の解析性――最少限，微分可能性――の条件を含んでいる（定義 39 参照）．このために，リー群の研究においては，微分方程式論を含む解析学を，道具として広く用いることができる．このために，リー群は非常に詳しく研究することができる．即ち，解析的な手段によって，リー群のすべての研究は，初等的な，とはいえ極めてデリケートな，代数的な問題の研究に帰着させられるのである（第 10 章参照）．これらの初等的，代数的な問題は，本質的には，行列論における或る特殊な問題である．これらの考察があって後，始めて，実際にリー群の詳しい，そして深い，理論が始まるのである（第 11 章参照）．しかし，この章では，このような問題は取上げない．

少し以前の理論においては，考えている函数の微分可能性或は解析性についての問題は，一般に，余り厳密には詮索されなかった．研究の過程において生ずる函数はすべて，必要に応じて，簡単に，微分可能或は解析的であると仮定されていた．しかし，ここには，本質的な欠陥がある．一つの対象の**定義**に現われる**或る定った**函数の微分可能性を仮定することと，その対象の研究の過程において遭遇することあるべき**すべて**の函数を，前以て微分可能であると想定することとは，全く別のことである．実際，初めにはこれらの函数の性質は，まだ全然知れていないし，それを予め数え上げることすらできないし，また，全く自然な問題から生ずる函数が微分不可能であるということもあり得よう．リー群の古典的な理論がそれ程簡単に行かないのは，正にこのためなのである．例えば，我々が或るリー群を考えているとき，*a priori* に，そのすべての部分群がまたリー群であるなどということはできない．ところが一方では，リー群の

任意の部分群を考察する必要は存在するのである．剰余群についても事情は全く同様である．また例えばリー群の同型対応を考える必要も起ってくるであろうが，それらは，いつでも微分可能な函数によって表わし得るものなのであろうか？ この章では，理論の準備として是非必要な，このような問題を解決しよう．即ち，或る定った函数の微分可能性或は解析性から出発して，研究の過程において自然に生じてくる一連の函数の，それぞれ微分可能性，或は解析性を証明するのである．実は，リー群の研究においては，唯微分可能性さえ仮定すればよい：この仮定から出発して，すべての問題を，研究対象を狭めることなく，解析函数に帰着させることができるからである．しかし，解析的な函数に帰着させることの証明は，この章の範囲を逸脱するので，ここでは，微分可能性と解析性とを別々に仮定して，二本立の議論を行なうことにする．微分可能な函数の場合だけに限定するわけにはゆかないのは，そうすると，次章の結果が不完全なものとなってしまうからである．

この章の諸結果は，まず第一に，第8章に対する準備的な素材を提供することを目的とする．第8章では，コンパクトな位相群の研究が，著しくリー群の研究に帰着される．それによって，コンパクトなリー群は，微分可能性の概念を用いることなしに，位相空間論の一般用語で特徴付けられるのである．

もし読者が，この問題の古典的な取扱い方に満足して，上に論じた原理的な問題に深く立入ることを欲しないならば，この章を完全に読む必要はない．§§41，42を定理60を除いて読むだけで十分である．

古典的な理論においては，**リー群**とは，微分可能な座標の導入された群芽を意味した（定義39参照）．群の**性質**とは，微分可能な座標変換によって不変な，方程式系§41，(3)の性質を意味する（§41，A）参照）．更に，リー群の**部分群**とは，§44，(20)の関係を満たす部分群をいう．即ち，その意味で，定理62は定義に含まれるのである．全く同様に，リー群の**準同型写像**とは，§44，(26)の関係によって与えられる準同型写像のみを指し，定理63もまた定義の中に含まれることになる．

本章において，また第10，11章において遭遇する夥しい計算を処理するため

に，この章で**テンソルの記法**を利用する．しかし，テンソル解析の知識は仮定しない．ここでは，総和記号 $\sum$ を用いないという約束だけを用いるのである．一般に通用する規則は次の如くである．即ち，添数は単に下にだけではなく上にも書き，かつ，同一の添数，例えば i が，二度，一度は上に一度は下に，現われる単項式は，添数 i に関する和を表わす．ここに添数 i は，その取り得るすべての値を亘るものとする．もし単項式において1対の添数でなく数対の添数が附されているならば，この単項式はそれに応ずる多重和を表わすものとする．例えば，単項式 $a_i b^i$ は和 $\sum_{i=1}^{r} a_i b^i$ を，また，単項式 $c^i{}_{ij}\, a^j$ は2重和 $\sum_i \sum_j c^i{}_{ij}\, a^j$ を表わすものと考えるのである．添数を上から下へ，またはその逆に移すことは許されない．添数の配置は，勿論，或る目的に適った方法で行なわれる．特に，点の座標及びベクトルの成分は上に添数を附した文字で表わされ，またこの文字は，その点或はベクトル自身を表わすためにも用いられる．例えば，点 x の座標は $x^1, \cdots, x^r$ で表わされる．上に附する添数を巾(べキ)の指数と区別するために時として行なわれるように，これを括弧の中に入れることは，しない．これに反し，文字を何乗かする場合には，その文字を括弧の中に書く．例えば $(a)^n$ は文字 a の n 乗を表わす．しかし，巾(べキ)が我々の考察に現われることは殆どない．$\delta^i{}_j$ は，$i=j$ ならば1を表わし，$i \neq j$ ならば0を表わすものとする．

§41. リ ー 群

古典的なリー群の理論は，何よりもまず，リー群芽の研究である．従って，ここで**リー群芽**の定義を与えよう．しかし，これは大域的な群にも適用し得るものである．

A)　群芽 G (§23, D) 参照) において，単位元の或る近傍 U を Euclid 座標空間 S の開集合 V の上に写す位相写像 φ が与えられ，これによって単位元は座標原点に写されるとき，G に**座標系**が導入されたと称する．これにより，各点 $x \in U$ には点 $\varphi(x) \in S$ の座標である

$$x^1, \cdots, x^r \tag{1}$$

なる実数の組が対応することとなる．これらの数を今後点 $x \in U$ の**座標**という．

ここで単位元の座標は0である．実数の組(1)は，これらの数の絶対値が十分小さいときには，これらの数をその座標にもつような或る定った点$x \in U$に対応する．数rは群芽Gの次元である(§23, N)及び§16参照)．Wを群芽Gの単位元の十分小さい近傍で，Wの二つの元x, yに対しては常に積xyが定義され，しかも$xy \in U$となるようなものとする．そのとき

$$xy = z = f(x, y) \tag{2}$$

が得られる．点x, y及びzはUに属する故，それらはみな座標をもつ．よって(2)なる関係は座標によって次のように書表わせる：

$$z^i = f^i(x, y) = f^i(x^1, \cdots, x^r ; y^1, \cdots, y^r). \tag{3}$$

ここに，右辺における函数f^iは，各変数の絶対値が十分小さい所で定義された1価連続函数である．更に，$xe = x$，$ey = y$なる故，

$$f^i(x^1, \cdots, x^r ; 0, \cdots, 0) = x^i,\ \ f^i(0, \cdots, 0 ; y^1, \cdots, y^r) = y^i \tag{4}$$

を得る．群芽Gに導入された座標(1)は，函数(3)が3回連続微分可能[1]であるときに**微分可能**であるといい，函数(3)が解析的なるとき**解析的**であるという．関係(4)より直ちに

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \frac{\partial f^i}{\partial y^j} = \delta^i{}_j (x = y = e) \tag{5}$$

が出る．(5)から，eの近くで，方程式(3)は元$x = zy^{-1}$の座標$x^1, \cdots, x^r$に関して解け，しかもこの座標が元y, zの座標に関する3回連続微分可能(或は解析的)な函数であることが出る[2]．同じことが元$y = x^{-1}z$に対しても成立する．

定義39. 群芽Gは，これに微分可能な座標を導入し得るとき(A)参照)，**リー群芽**という．可算近傍基を持つ位相群Gに，群芽として微分可能な座標を導入し得るとき，Gを**リー群**という．

明らかに，リー群芽はすべて局所コンパクトである(§23, N)参照)．リー群に適用する場合には，形容詞《コンパクト》は《可算コンパクト》で置換えても同じことになる．

第10章において，すべてのリー群芽に解析的な座標を導入し得ることを証

訳註 1)　即ち，3階までの偏導函数がすべて存在して，しかも連続．

訳註 2)　解析概論，第7章を参照．

明するが，この章においては，**解析的なリー群**と**微分可能なリー群**とを区別する．所謂 Hilbert の第5問題：群 G において何らかの座標（A）参照）の存在を仮定すれば，それから微分可能な座標の存在が言えるであろうか？ は，位相群の一般論における重要な問題である．この問題の解答は，この本では，コンパクト群及びアーベル群（定理70及び例75参照）に対して与えられる．一般の解答に対しては，〔11, 29〕を見よ．

リー群の研究はすべて，そこに導入し得る微分可能な座標を利用することによって遂行される．その群の性質を直接研究するのではなくて，乗法法則を表わす方程式系（3）の性質を研究するのである．その際，言うまでもなく，この系の性質のうち座標の選択に関係のない，従ってその群の性質を実際に表わしているものだけを研究するのである．まず第一に，群における或る定まった微分可能な座標系 D と共に，D から微分可能な座標変換（B）参照）によって得られるすべての座標系の集合 $[D]$ が考えられることは明らかである．後に（§43参照），集合 $[D]$ はその群に導入し得る限りの微分可能な座標系をすべて含んでいることが証明されるであろう．かくして，問題は，方程式系（3）の微分可能な変換に関する不変式を見出だすことに含まれる．このような問題のとらえ方は，全く古典的なものである．唯，リー群の古典的な理論では，与えられた一定の微分可能な座標系 D を仮定して，集合 $[D]$ に属する座標系のみを考察の対象にした．$[D]$ に入らない座標系が存在するかどうかというような問題は，全然問題にされなかったのである．

B）G をリー群芽，D を G における或る微分可能な座標系とする．任意の点 x の D に関する座標を，普通の通り，x^i と書く．

$$\varphi^i(x) = \varphi^i(x^1, \cdots, x^r), \qquad i = 1, \cdots, r \tag{6}$$

を

$$\varphi^i(e) = \varphi^i(0, \cdots, 0) = 0 \tag{7}$$

なる如き3回連続微分可能な函数の組とする．また

$$p^i{}_j = \frac{\partial \varphi^i(e)}{\partial x^j} \tag{8}$$

とおき，行列 $\|p^i{}_j\|$ の行列式は0でないと仮定しよう．そのとき，方程式系

$$x'^i = \varphi^i(x^1, \cdots, x^r), \qquad i = 1, \cdots, r \tag{9}$$

は G に導入された新しい座標系 D' と見做すことができる．即ち，点 x の新しい座標として数 x'^i を取ることができるのである．明らかに，D' は微分可能であり，D 及び変換(9)が解析的ならば，それはまた解析的でもある．D より D' への移行は，それぞれ**微分可能な**，或は**解析的な**，**座標変換**と呼ばれる．そのとき D' から D への逆の移行もまた，微分可能乃至は解析的な座標変換である．

C)　G をリー群芽，D を G 上に与えられた微分可能な座標系とする．区間 $|t| \leqq \alpha$ から G の中への連続写像 x で，条件 $x(0)=e$ を満たすものが定義されたとき，G に**曲線** x が与えられたという．曲線 x について，もし導函数

$$\frac{dx^i(0)}{dt}=a^i \tag{10}$$

が存在するならば，その曲線は座標系 D において**接線を有する**という．数 a^i は曲線 x の**接ベクトル** a の成分と考えられる．勿論，ここでは点 $t=0$ における接ベクトルについていっているのであるが，他の点における接ベクトルは考えないので，《点 $t=0$ における》という言葉は常に省略することにする．もし座標系 D から(9)なる関係によって新座標系 D' に移るならば，ベクトル a は新しい座標において，関係

$$a'^i=p^i{}_j a^j \tag{11}$$

によって表わされる新しい成分 a'^i を持つ((8)参照)．上に実行された構成によって，リー群芽 G に，G における微分可能な曲線の接ベクトル全体より成るベクトル空間 R を対応させることができる．G と R との間の関係は，或る定った座標系 D の援けを借りて始めて与えられる．勿論，G における各座標変換(9)に対しては，R における定った座標変換(11)が対応し，G と R との間の関係は，G における微分可能な座標変換に対して不変なものである．

D)　G, G' を二つの微分可能，または解析的なリー群芽とするとき，その直積 H も微分可能，または解析的な，リー群芽となる．

実際，D, D' をそれぞれ群芽 G, G' の微分可能，または解析的な，座標系としよう．$x^1, \cdots, x^r$ を点 $x \in G$ の座標，$x'^1, \cdots, x'^s$ を点 $x' \in G'$ の座標とするとき，対 $(x, x') \in H$ の座標として数 $x^1, \cdots, x^r, x'^1, \cdots, x'^s$ を取る．群芽 G 及び G' にお

ける乗法が座標の形で

$$z^i = f^i(x^1, \cdots, x^r; y^1, \cdots, y^r), \tag{12}$$

$$z'^i = f'^i(x'^1, \cdots, x'^s; y'^1, \cdots, y'^s) \tag{13}$$

なる関係によって書かれるとき，群芽 H における乗法法則は関係式(12)と(13)とを併せることによって与えられる．かくして主張 D) は証明された．

E) 定義により，各リー群には，乗法法則が3回連続微分可能な函数によって表わされるような座標系 D が存在する(3)参照)．このような座標系を，微分可能な座標系という．座標系 D から座標系 D' への移行(9)を与えている函数(6)に対して，座標系 D' がまた，上述の意味で微分可能となるように，3回連続微分可能という仮定をおくことにする．

函数(6)が2回連続微分可能なだけでは，変換(9)によって得られる座標系 D' は，上述の意味で微分可能とはならない．そこにおいて乗法法則を表わす函数が2回連続微分可能にしかならないからである．しかしながら，このような2回微分可能な座標系も，ある種の目的のために利用されることはある．特に，曲線 $x = x(t)$ に対する接線の定義 C) は，この曲線が2回微分可能な座標系において与えられている場合に対しても，意味をもつ．

例 76. G を行列式が0でないすべての n 次正方行列から成る位相群とする．G が解析的なリー群であることを示そう．このために次の如く G に座標を導入する．任意の行列 $x \in G$ を

$$e + \|x^i{}_j\|, \tag{14}$$

但し e は単位行列，なる形で表わし，行列 $\|x^i{}_j\|$ の成分を行列 x の座標とする．このようにして得られた，群 G 全体から n^2 次元 Euclid 空間の開集合 S の上への写像 φ は，単位元を座標原点に写す．関係式(3)は G に対しては次の如き代数的な形をとる．

$$z^i{}_j = x^i{}_j + y^i{}_j + x^i{}_k y^k{}_j. \tag{15}$$

このようにして，G は解析的なリー群となる．同様に，行列式が0でない n 次複素正方行列は，$2n^2$ 次元の解析的なリー群を作る．

§42. 1径数部分群

リー群の研究に対して，1径数部分群(§23, M)参照)は重要な役割を演ずる．この部分群はリー群に本質的に結びついている．即ち，群における座標の選定に関係せず，群に特に本質的な座標を導入することを可能ならしめるのである．

A) G をリー群芽，D を G における2回微分可能な座標系とする(§41, E)参照)．群 G の1径数部分群 g(§23, M)参照)は，曲線 g がこの座標において接ベクトル(§41, C), E)参照)を有するとき，系 D において**微分可能**であると呼ばれる．このベクトルを部分群 g の**方向ベクトル**と呼ぼう．

与えられた方向ベクトル a を有する1径数部分群の存在並びにその一意性に関する問題を取上げよう．これについての定理を完全に定式化するために，

$$u^i{}_j(x) = u^i{}_j(x^1, \cdots, x^r) = \frac{\partial}{\partial y^j} f^i(x^1, \cdots, x^r; 0, \cdots, 0) \qquad (1)$$

なる補助函数を導入しよう(§41, (3)参照)．

定理 58. G をリー群芽，D を G に導入された2回微分可能な座標系とする．そのとき，方向ベクトル a を有する1径数部分群はすべて方程式系

$$\frac{dg^i(t)}{dt} = u^i{}_j(g(t))a^j \qquad (2)$$

((1)参照)の初期条件

$$g^i(0) = 0 \qquad (3)$$

の下での解である．逆に，初期条件(3)を伴う系(2)の解は，方向ベクトル a を有する1径数部分群を定義する．初期条件(3)を伴う系(2)の解の存在並びにその一意性によって，群 G には，方向ベクトル a を有する1径数部分群 $g = g(a, t)$ が，一つ，しかも唯一つに限り存在する．(2)より，函数 $g^i(a, t) = g^i(a^1, \cdots, a^r; t)$ は，0の十分小さな近傍において，座標系 D が微分可能(即ち3回微分可能)ならば2回まで連続微分可能であり，また，座標系 D が解析的ならばそれも解析的である．

証明. g を方向ベクトル a を有する1径数部分群とする．そのとき，元 $g(t)$ の座標 $g^i(t)$ は初期条件(3)を以て方程式系(2)を満たすことを示そう．

$$\lim_{s\to 0}\frac{g^i(t+s)-g^i(t)}{s}=(g^i)'(t) \tag{4}$$

を計算する．関係 $g(t+s)=g(t)g(s)$ 及び §41,（3），（4）より

$$g^i(t+s)=f^i(g(t),g(s))=g^i(t)+u^i{}_j(g(t))g^j(s)+\varepsilon^i s,$$

但し $\varepsilon^i\to 0\ (s\to 0)$，を得る．従って

$$\frac{g^i(t+s)-g^i(t)}{s}=u^i{}_j(g(t))\frac{g^j(s)}{s}+\varepsilon^i.$$

これより，導函数 $(g^i)'(t)$ が存在し，函数 g^i は系（2）を満たすことが出る．$g(0)=e$ 故，$g^i(0)=0$ であり，これは初期条件（3）を与えるものである．

今度は函数 g^i が初期条件（3）の下での系（2）の解であると仮定し，座標 $g^i(t)$ を有する点 $g(t)$ が方向ベクトル a を有する1径数部分群を作ることを示そう．関係 §41，（5）より，$\dfrac{dg^i(0)}{dt}=a^i$，即ち，曲線 g が方向ベクトル a を持つことが出る．あと証明すべきことは，g が1径数部分群なることである．

$$g^*(t,u)=g(t)\,g(u) \tag{5}$$

とし，$g^{*i}(t,u)$ によって点 $g^*(t,u)$ の座標を表わすことにする．差

$$g^{*i}(t,u)-g^i(t+u)=\varepsilon_1{}^i u \tag{6}$$

を評価しよう：即ち，$\varepsilon_1{}^i$ が u と共に0に収束することを証明しよう．

$g^{*i}(t,u)=f^i(g(t),g(u))$ であるから

$$g^{*i}(t,u)=g^i(t)+u^i{}_j(g(t))a^j u+\varepsilon_2{}^i u, \tag{7}$$

但し，$\varepsilon_2{}^i$ は u と共に $\to 0$．他方関係（2）より

$$g^i(t+u)=g^i(t)+u^i{}_j(g(t))a^j u+\varepsilon_3{}^i u, \tag{8}$$

但し，$\varepsilon_3{}^i$ は u と共に $\to 0$．関係（7）及び（8）より，$\varepsilon_1{}^i\to 0\ (u\to 0)$．

今度は函数 $g^{*i}(s,t)$ が方程式系

$$\partial g^{*i}(s,t)/\partial t=u^i{}_j(g^*(s,t))a^j \tag{9}$$

の初期条件

$$g^{*i}(s,0)=g^i(s) \tag{10}$$

の下での解であることを示そう．関係(10)は等式（5）より直接出る．$\dfrac{\partial g^{*i}(s,t)}{\partial t}$ を計算する．

$$g^{*i}(s,t+u)=f^i(g(s),g(t+u)).$$

これを関係(6)とあわせて考えれば

$$g^{*i}(s,t+u)=f^i(g(s),g^*(t,u))+\varepsilon_4{}^i u,$$

但し $\varepsilon_4{}^i\to 0$ $(u\to 0)$, を得る. これから乗法の結合律に基づいて

$$g^{*i}(s,t+u)=f^i(g^*(s,t),g(u))+\varepsilon_4{}^i u.$$

この関係は, 等式(1)によって

$$g^{*i}(s,t+u)=g^{*i}(s,t)+u^i{}_j(g^*(s,t))a^j u+\varepsilon_5{}^i u, \tag{11}$$

但し $\varepsilon_5{}^i\to 0$ $(u\to 0)$——に書改められる. この等式より直接等式(9)が出る.

一方, 函数 $g^i(s+t)$ もまた系(9)を初期条件(10)を以て満足させる. 即ち

$$\frac{\partial g^i(s+t)}{\partial t}=u^i{}_j(g(s+t))a^j, \tag{12}$$

$$g^i(s+0)=g^i(s). \tag{13}$$

何故ならば, 方程式(12)は方程式(2)と一致するからである.

こうして, $g^{*i}(s,t)$ 及び $g^i(s+t)$ は変数 t の函数として同一の方程式系(9), (12)の同一の初期条件(10), (13)の下での解となる. これから, この方程式の解の一意性により, $g^{*i}(s,t)=g^i(s+t)$ が結論される. このことは, $g(s)g(t)=g(s+t)$ ((5)参照), 即ち g が1径数部分群なることを示す. 微分可能性(解析性)の主張は, 常微分方程式の一般論より出る. 証了.

B) G をリー群芽, D を群芽 G の単位元の近傍 U において導入された2回微分可能な座標系とする. 開集合 $V\subset U$ (特別な場合としては, 開集合 U)は, それが V の点 $(x^1,\cdots,x^r)$ と共に $(tx^1,\cdots,tx^r)$ $(|t|\leqq 1)$ なる点をすべて含むとき, **星形**であるという. 星形の開集合 U における座標系 D において, r 箇の実数の任意の組 $(a^1,\cdots,a^r)$ に対し D における座標が $(a^1t,\cdots,a^rt)$ である点 $x(t)$ が, $x(t)\in U$ となるようなすべての t の値に対して1径数部分群を作るとき, D を**第1種の標準座標系**という. 明らかに, 第1種の標準座標の1次変換によってまた第1種の標準座標が得られる.

C) G をリー群芽, D を近傍 U 内に導入された第1種の標準座標系とする(B)参照). D において微分可能であり, $|t|\leqq\alpha$ において定義され, しかも $|t|$

$\leqq \alpha$ に対しては $g(t) \in U$ という条件を満たす 1 径数部分群は，すべて，D による座標では

$$g^i(t) = a^i t \quad (|t| \leqq \alpha) \tag{14}$$

なる形に書ける，ここに a^i は部分群 g の方向ベクトルである．

これを証明しよう．$h^i(t) = a^i t$ とおく．第 1 種標準座標系の定義によって，この関係式は，それが意味を有するようなすべての t に対して 1 径数部分群を定義する．U は対称な開集合であるから，この t の値の集合は開区間 $|t| < \beta$ である．1 径数部分群 g と h とは，同一の方向ベクトルを有し，従って t の十分小さな値に対しては一致する (定理 58 参照)．従ってそれらは，それらが共に定義されるすべての t に対しても一致する．後は $\alpha < \beta$ を言えばよい．そうでないとすると，$a^i\beta = g^i(\beta)$．従って $(a^1\beta, \cdots, a^r\beta) \in U$．よって方程式 $h^i(t) = \alpha^i t$ が $t = \beta$ に対して解をもち，β の定義に反する．

定理 59. D をリー群芽 G における微分可能または解析的な座標系とする．そのとき，第 1 種の標準座標系 D' が存在し，D より D' への変換はそれぞれ 2 回連続微分可能または解析的であり，かつ，D から D' への変換に対応する行列 $\|p^i{}_j\|$ (§41, B) 参照) の行列式は 1 に等しい．

証明. g を座標系 D において微分可能な 1 径数部分群で方向ベクトル a を有するものとする (定理 58 参照)．

$$g(t) = g(a, t) \tag{15}$$

とおいて，1 径数部分群 g がベクトル a によって定まるものであることを明示することにする．点 $g(t)$ の系 D における座標を $g^i(t)$ で，またベクトル a の座標を a^i で表わせば

$$g^i(t) = g^i(a, t) = g^i(a^1, \cdots, a^r; t) \tag{16}$$

と書ける．函数 $g(\alpha t)$ を考えよう．但し，α は実数とする．

$$g(\alpha s) g(\alpha t) = g(\alpha s + \alpha t) = g(\alpha(s + t))$$

故，$g(\alpha t)$ は径数 t の函数として 1 径数部分群を描く．この 1 径数部分群 $g(\alpha t)$ の方向ベクトルは αa である．実際，$t = 0$ において

$$\frac{dg^i(\alpha t)}{dt} = \frac{dg^i(\alpha t)}{d(\alpha t)} \alpha = \alpha a^i.$$

定理 58 によって G には方向ベクトル αa を有する 1 径数部分群が唯一つ存在するから

$$g(a, \alpha t) = g(\alpha a, t) \tag{17}$$

と書くことができる．この関係はまた別に

$$g^i(a, \alpha t) = g^i(\alpha a, t), \tag{18}$$

或は

$$g^i(a^1, \cdots, a^r ; \alpha t) = g^i(\alpha a^1, \cdots, \alpha a^r ; t) \tag{19}$$

の形にも書ける．函数(16)は系(2)の解として，そのすべての変数に関し，$|t| \leqq \varepsilon$, $|a^i| \leqq \varepsilon$(ここに，ε は十分小さな正数)において 2 回連続微分可能或は解析的であることに注意しよう．関係(19)より

$$g^i(a^1, \cdots, a^r ; t) = g^i\left(\frac{a^1 t}{\varepsilon}, \cdots, \frac{a^r t}{\varepsilon} ; \varepsilon\right).$$

従って函数(16)は条件 $|a^i t| \leqq \varepsilon^2$ を満たすすべての変数値に対して，特に $t = 1$, $|a^i| \leqq \varepsilon^2$ に対して，定義される．

$$h^i(a) = h^i(a^1, \cdots, a^r) = g^i(a^1, \cdots, a^r ; 1) \tag{20}$$

と置く．函数(20)は条件

$$h^i(0, \cdots, 0) = 0 \tag{21}$$

を満たす．実際，

$$h^i(0a^1, \cdots, 0a^r) = g^i(a^1, \cdots, a^r ; 0) = 0.$$

函数(20)の点 0 における微係数を計算しよう．$\dfrac{\partial}{\partial a^j} h^i(0, \cdots, 0)$ の計算に際して，a^j を除く他のすべての変数は前以て 0 に等しいとしておくことができる．それ故，ベクトル a に特別な値 a' を与えよう：ベクトル a' においては，第 j 座標の値が 1，これを除く他のすべての座標は 0 なるものとする．そして次に導函数 $\dfrac{d}{dt} h^i(a't)$ を計算する．式(20)及び(19)により，$h^i(a't) = g^i(a', t)$ を得る．かくして，$\dfrac{d}{dt} h^i(a't) = \dfrac{d}{dt} g^i(a', t)$．この等式において $t = 0$ とおき，微係数 $\dfrac{d}{dt} g^i(a', 0)$ が部分群 $g(a', t)$ の方向ベクトル a' の第 i 座標に等しいことを知る；式 §41, (10) 及び特に選んだベクトル a' の形より

$$\frac{\partial}{\partial a^j} h^i(0, \cdots, 0) = \delta^i{}_j. \tag{22}$$

群芽 G に座標系 D' を導入するために，未知数 x'^k に関する方程式系

$$x^i = h^i(x'^1, \cdots, x'^r) \tag{23}$$

を考える．$x^i = 0$ に対して系(23)は解 $x'^k = 0$ を有する(等式(21)参照)．更に，0 において系(23)のヤコビアンは 1 に等しい(等式(22)参照)．従って，系(23)は一意に解けて，変数値が 0 に近いとき連続であり，よってこれを用いて，系 D においては座標 x^i を有する点 x に対して新しい 2 回微分可能な座標 x'^k を導入することができる(§41, E)参照)．このような方法で得られた新しい座標系を D' で表わそう．

群芽 G において，座標系 D' において 1 次方程式

$$g^{*i}(t) = a^i t \tag{24}$$

で与えられる曲線 $g^*(t)$ を考えよう．この曲線が座標 D ではどんな形を取るかを考える．そのために，方程式(23)において x'^k を $a^k t$ で置換える．即ち

$$x^i = h^i(a^1 t, \cdots, a^r t) = g^i(a^1, \cdots, a^r ; t)$$

((20)及び(19)参照)．このことは，ここで考えている曲線 $g^*(t)$ が 1 径数部分群なることを示している．このようにして，座標 D' において等式(24)で与えられる曲線はすべて一つの 1 径数部分群を与え，従って座標 D' は第 1 種の標準座標となる(B)参照)．

函数(16)は 2 回連続微分可能，或は解析的であるから，函数(20)もまた同じ性質を持っている．従って，座標 D' から座標 D への移行は 2 回連続微分可能，或は解析的である．

こうして，定理 59 は証明された．

次の定理 60 は，各 1 径数部分群が任意の微分可能座標系において微分可能であることを示す．このように，定理 60 は，前以て微分可能と仮定されていない或る函数の微分可能性を証明するという計画の第一段階をなすものである．

定理 60. D をリー群芽 G における或る微分可能座標系とする．そのとき，群芽 G の 1 径数部分群はすべて，座標系 D において微分可能(A)参照)である．

証明. 定理 59 によって，座標系 D から 2 回微分可能な変換によって第 1 種の標準座標系 D' に移れるから，証明は座標系 D' において実行すればよい．

U をそこで座標系 D' が定義されている群 G の単位元の(星形)近傍, また V を同じく単位元 e の星形近傍で, その任意の2元の積が定義され, しかもそれが U に入るようなものとする(§23, E)参照). また更に, α を, $|t|\leqq\alpha$ に対しては $g(t)\in V$ なる如き正数とする. ($|t|\leqq\alpha$ に対する)点 $g(t)$ の系 D' における座標を $g^1(t),\cdots,g^r(t)$ で表わし, a_n (n は自然数)を成分 $a_n{}^i=\dfrac{n}{\alpha}g^i\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)$ を有するベクトル, g_n を方向ベクトル a_n を有する1径数部分群としよう(定理58参照). D' は第1種の標準座標系なる故, 1径数部分群 g_n は座標で表わせば, 点 $(a_n{}^1t,\cdots,a_n{}^rt)$ が U に入るようなすべての t に対して

$$g_n{}^i(t)=a_n{}^it \tag{25}$$

と書ける(B)参照). $|t|\leqq\alpha$ ならば, この条件が満たされることを証明しよう.

$g_n\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)=g\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)$, $g\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)\in V$ 故, $|t|\leqq\dfrac{1}{n}\alpha$ に対しては点 $(a_n{}^1t,\cdots,a_n{}^rt)$ は V に入り, 従って $|t|\leqq\dfrac{1}{n}\alpha$ に対しては関係(25)は ($|t|\leqq\dfrac{1}{n}\alpha$ に対して) 開集合 V 内に横たわる1径数部分群 g_n を定義する. m を n より小さな負でない整数とし, $|t|\leqq\dfrac{m}{n}\alpha$ に対しては関係(25)が($|t|\leqq\dfrac{m}{n}\alpha$ に対して) V 内に横たわる1径数部分群を定義し, かつ $g_n\left(\dfrac{m}{n}\alpha\right)=g\left(\dfrac{m}{n}\alpha\right)$ なることが既に証明されているものとしよう. $\dfrac{m}{n}\alpha<t\leqq\dfrac{m+1}{n}\alpha$ ならば, $t=\dfrac{m}{n}\alpha+\theta$, $0<\theta\leqq\dfrac{1}{n}\alpha$. 元 $g_n\left(\dfrac{m}{n}\alpha\right)$ 及び $g_n(\theta)$ は V 内にあり, 従ってその積は定義され, かつ U に入る. $g_n(t)=g_n\left(\dfrac{m}{n}\alpha\right)g_n(\theta)$ 及び $g_n(-t)=\left[g_n\left(\dfrac{m}{n}\alpha\right)g_n(\theta)\right]^{-1}$ とおく. そうすると, 函数 g_n は $|t|\leqq\dfrac{m+1}{n}\alpha$ に対して定義され, 容易に見られるように, U に横たわる1径数部分群を表わす. 従って(C)参照), 関係(25)は $|t|\leqq\dfrac{m+1}{n}\alpha$ に対して拡張される. $g_n\left(\dfrac{m}{n}\alpha\right)=g\left(\dfrac{m}{n}\alpha\right)$, $g_n\left(\dfrac{1}{n}\alpha\right)=g\left(\dfrac{1}{n}\alpha\right)$ 故, $g_n\left(\dfrac{m+1}{n}\alpha\right)=g\left(\dfrac{m+1}{n}\alpha\right)$. また $g\left(\dfrac{m+1}{n}\alpha\right)\in V$ 故, $g_n\left(\dfrac{m+1}{n}\alpha\right)\in V$. 開集合 V が星形(B)参照)であるから, これより $|t|\leqq\dfrac{m+1}{n}\alpha$ に対して $g_n(t)\in V$ なることがわかる. 帰納法により, $|t|\leqq\alpha$ に対しては関係(25)は V に横たわる1径数部分群 g_n を定義し, かつ条件

$$g_n\left(\frac{m}{n}\alpha\right)=g\left(\frac{m}{n}\alpha\right),\quad m=0,1,\cdots,n \tag{26}$$

が満たされることがわかる. $m=n$ なる場合の関係 (26) と関係 (25) とから, $a_n{}^t\alpha=g^t(\alpha)$ が出, よって, ベクトル a_n は実際には n に依存しない. 同時に 1 径数部分群 g_n : $g_n=g^*$, $n=1, 2, \cdots$, もまた, n に依存しない. 関係(26)は

$$g^*\left(\frac{m}{n}\alpha\right)=g\left(\frac{m}{n}\alpha\right), \tag{27}$$

但し, m, n は条件 $m\leqq n$ を満たす任意の自然数, を与える. g と g^* とは共に連続函数なる故, 等式(27)より $g=g^*$ となる. こうして, 1 径数部分群は微分可能である.

こうして, 定理 60 は証明された.

例 77. R をすべての n 次実(複素) 正方行列よりなる位相環とし, 単位行列を e で表わす. $x \in R$ に対して, $\exp(x)$ を

$$\exp(x)=e+x+\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{3\,!}x^3+\cdots \tag{28}$$

と定義する. 容易にわかるように, この等式の右辺の級数は常に収束する. x, y を互に交換可能な二つの行列, 即ち $xy=yx$, とすると, 等式

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y) \tag{29}$$

が成立することは, 容易に証明できる. 特に, $\exp(x)\exp(-x)=e$. 従って, 行列 $\exp(x)$ の行列式は常に 0 でない.

更に, 式(28)から, 多変数函数に対する陰函数についての定理により, $\exp(x)$ が環 R の 0 の或る近傍 V_ε から群 G の単位元 e の或る近傍 W_ε の上への解析的位相写像を与えることが容易に証明される. こうして, 各行列 $w \in W_\varepsilon$ は一意的に $w=\exp(x)$, $x \in V_\varepsilon$, の形に表わされる. そこで W_ε の上では exp の逆写像を考えることができる. それを記号 log で表わそう. 即ち, $x=\log w$ である.

これによって, 行列 $w=\exp(x)$ の座標として行列 x の成分 x_{ij} (複素数の場合には, w の座標として行列 x の成分 x_{ij} の実部及び虚部) をとることができる. この座標は第 1 種の標準座標系(B)参照) となる. 実際, $a \in R$ とし, s, t を或る実数とする. 行列 $\exp(ta)$ は行列式 $\neq 0$ を持ち, 従って G に属す. 行列 sa 及

び ta は互に交換可能故

$$\exp((s+t)a) = \exp(sa)\exp(ta).$$

こうして，$\exp(ta)$は，行列 a を固定したとき，t を径数とする1径数部分群を定義する．先に導入した座標において，この1径数部分群は $x_{ij} = ta_{ij}$ の形に書ける．そしてこのことは，座標 x_{ij} が第1種の標準座標系であることを示している．

§43. 不変定理

ここでは，リー群 G に二つの微分可能座標系が存在するとき，それらは微分可能な座標変換によって互に変換されるということを示す．この命題の意義は既に§41において述べた通りである．これはリー群の座標による研究の基礎を据えるものである．事実，群の乗法法則を座標を導入して研究するとき，我々は実際には§41,（3）なる方程式系の性質を研究しているのである．群本来の性質を得るためには，この系の性質で座標変換によって変らないものを求めねばならない．後に証明される定理61は，この際，座標変換としては**微分可能な**座標変換を考えれば十分であるということを示すものである．

定理61を証明するために，ここに，**第2種の標準座標**を導入しよう（A)参照)．

A) G をリー群芽，D を G に導入された微分可能な（解析的な）座標系とする．群芽 G における1径数部分群 $g_1, \cdots, g_s$ の系 D において取られた方向ベクトルが1次独立であるとき，それらの部分群は座標系 D において**1次独立**であるという．r を系 D の座標の数とする．G において r 箇の，座標系 D において1次独立な，1径数部分群

$$g_1, \cdots, g_r \qquad (1)$$

を選び

$$g(t^1, \cdots, t^r) = g_1(t^1)g_2(t^2)\cdots g_r(t^r) \qquad (2)$$

とおく．そのとき，十分小さな正数 γ が存在して，$|t^k| < \gamma$; $k = 1, \cdots, r$, に対しては，（2）の積が定義され，（2）なる形の点全体は群芽 G の単位元の或る近

傍 W_γ を形成し，逆に W_γ の各点は一意に，$|t^k|<\gamma$ を以て(2)の形に表わされ，しかも，系 D から，このようにして開集合 W_γ に生じた座標 $t^1, \cdots, t^r$ の系 D^* への変換は，微分可能(解析的)となる．座標系 D^* を**第2種の標準座標系**という．

命題A)の証明のために，点 $g_k(t)$ の系 D における座標を $g_k{}^i(t)$，点 $g(t^1, \cdots, t^r)$ の系 D における座標を $g^i(t^1, \cdots, t^r)$，最後に，群 g_k の方向ベクトル a_k の同じく系 D における座標を $a_k{}^i$ と書く．系 D^* から系 D への移行は

$$x^i = g^i(t^1, \cdots, t^r) \tag{3}$$

なる関係によって与えられる．ここに，x^i は点 x の系 D における座標であり，t^k はその同じ点の系 D^* における座標である．命題A)を証明するためには，系(3)が§41の定義B)の条件を満たすことを示せば十分である．

系(3)は微分可能(解析的)である．これは定理58から直ちに出る．$g_k(0)=e$ なる故，$g(0, \cdots, 0)=e$，従って，$g^i(0, \cdots, 0)=0$．変数値が0なるときの導函数 $\dfrac{\partial}{\partial t^k}g^i(t^1, \cdots, t^r)$ の値を計算する．この際変数は，唯一つ，t^k，を除いてすべて予め0に等しいとしておく．そのとき

$$\frac{\partial}{\partial t^k}g^i(t^1, \cdots, t^r) = \frac{\partial}{\partial t}g_k{}^i(t) = a_k{}^i \quad (t^k = t = 0).$$

こうして系(3)のヤコビアンは行列 $\|a_k{}^i\|$ の行列式に等しいが，これは選んだ部分群の系(1)の1次独立性によって，0にはならない．かくて単位元の十分小さな近傍において系(3)は解を有するから，主張A)は証明されたことになる．

定理61に移るに先立って，予備的な注意B)，C)をしておこう．

B) G をリー群芽，D, D' をそこに与えられた二つの微分可能な座標系，また，R, R' をそれぞれ座標系 D, D' によって群芽 G に対応するベクトル空間(§41, C)参照)とする．g を G における1径数部分群とし，その座標 D, D' における方向ベクトル(定理60参照)をそれぞれ a, a' と書く；$a \in R$, $a' \in R'$．こうして得られた空間 R と R' との間の1対1対応 $a \rightleftarrows a'$ は双連続であることがわかる．このことにより，群芽 G のすべての1径数部分群の集合に，座標の選択に依存しない位相を自然に導入することができる．部分群の間の近さは，任意に選んだ微分可能座標系において，その方向ベクトル間の近さとして定義される

のである．

定理59によって，一般性を制限することなく，系 D 及び D' は共に(2回微分可能な)第1種の標準座標系であると考えることができる．写像 $a\to a'$ の連続性を或る定ったベクトル a の近くで証明するために，正数 τ を十分小さく選んで，座標 $a^i\tau$ をもつ点が系 D において，また座標 $a'^i\tau$ をもつ点が系 D' において，それぞれ定義され，かつ，これらの点が共に点 $g(\tau)$ に一致するようにする(§42, B)参照)．こうすれば，ベクトル a の微小変化には，明らかに，点 $g(\tau)$ の微小変化が対応し，点 $g(\tau)$ の微小変化には，その座標 $a'^i\tau$ の微小変化が，即ちベクトル a' の微小変化が対応する．かくして写像 $a\to a'$ は連続である．写像 $a'\to a$ の連続性も同様にして証明される．

C)　$f(z^1, \cdots, z^k)$ を星形の開集合 U(§42, B)参照)において定義された変数 $z^1, \cdots, z^k$ の函数とする．任意の定数の系 $c^1, \cdots, c^k$ に対して，$c^1t, \cdots, c^kt$ を座標にもつ点が U の中に入るような t の値に対して定義される径数 t の函数 $f(c^1t, \cdots, c^kt)$ が，径数 t の斉次1次函数であるとき，即ち

$$f(c^1t, \cdots, c^kt) = ct, \tag{4}$$

但し，c は t に依存せず——であるとき，函数 $f(z^1, \cdots, z^k)$ を**斉次**であるという．もし斉次な函数 $f(z^1, \cdots, z^k)$ が微分可能ならば，それは $z_1, \cdots, z_k$ の斉次1次式である．即ち

$$f(z^1, \cdots, z^k) = p_1z^1 + \cdots\cdots + p_kz^k,$$

但し，$p_1, \cdots, p_k$ は定数——となる．

$(c^1, \cdots, c^k)\in U$ とおく．そのとき，関係(4)は $|t|\leqq 1$ に対して正しく，$t=1$ に対しては

$$f(c^1, \cdots, c^k) = c \tag{5}$$

を与える．関係(4)を t に関し $t=0$ において微分すれば

$$c = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial z^i} f(0, \cdots, 0)c^i \tag{6}$$

を得る．関係(5)，(6)を併せて，$f(z^1, \cdots, z^k)$ が斉次の1次函数であることが示される．

定理 61. D, D' をリー群芽 G における二つの微分可能（解析的）座標系とする．点 x の系 D における座標を $x^1, \cdots, x^r$, また系 D' におけるそれを $x'^1, \cdots, x'^s$ とする．そのとき $s=r$ であって，かつ

$$x'^i = \varphi^i(x^1, \cdots, x^r),\ i=1, \cdots, r, \tag{7}$$

と表わされる．このとき φ^i は 3 回連続微分可能（解析的）な函数であって，$x^1 = \cdots = x^r = 0$ において函数行列式 $\left|\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right|$ は 0 でない．もし D 及び D' が第 1 種の標準座標系であるならば，関係（7）は 1 次形式

$$x'^j = \sum_{i=1}^{r} p^i{}_j\, x^i,\ j=1, \cdots, r \tag{7'}$$

となる．

等式 $r=s$ は，群芽の次元の不変性（§23, N）及び §16 参照）からも出るが，ここではこの等式は直接証明される．

証明. $r \leqq s$ と仮定する．A）におけると同様，座標 D において 1 次独立な r 箇の 1 径数部分群

$$g_1, \cdots, g_r \tag{8}$$

を選ぶ．座標 D' において，これらの部分群は方向ベクトルをもつ（定理 60 参照）が，しかし，1 径数部分群（8）が座標 D' においてもまた 1 次独立であることは，決して自明ではない．けれども，これらの部分群を僅かに変えることによって（B）参照），それらが座標 D' においても 1 次独立であると考えることができる，何故ならば $s \geqq r$ だからである．十分小さな変化に対しては，（8）の部分群の座標 D における 1 次独立性は失われないから，（8）の部分群は座標 D 及び D' において同時に 1 次独立であると考えることができる．もし $s>r$ ならば，系（8）に 1 径数部分群 $g_{r+1}, \cdots, g_s$ を補って，新しい系

$$g_1, \cdots, g_r, g_{r+1}, \cdots, g_s \tag{9}$$

が座標 D' において 1 次独立になるようにする．1 径数部分群の系（8）及び（9）を基礎として，第 2 種の標準座標系 D^* 及び D'^* を構成することができる．

U 及び U' を系 D^* 及び D'^* の定義開集合，また t を $g_{r+1}(t) \in U \frown U'$ となるような十分小さい正数とする．点 $g_{r+1}(t)$ の系 D'^* における座標は，$t'^1 = 0, \cdots, t'^r$

$= 0,\ t'^{r+1} = t,\ t'^{r+2} = 0, \cdots,\ t'^s = 0$. 点 $g_{r+1}(t)$ の系 D^* における座標を $t^1, \cdots, t^r$ で表わすと

$$g_1(t^1)g_2(t^2)\cdots g_r(t^r)g_{r+1}(0)\cdots g_s(0) = g_1(0)g_2(0)\cdots g_{r+1}(t)\cdots g_s(0).$$

この等式で座標系 D'^* の座標成分を考えれば，これから $t=0$ が得られるが，これは仮定に反する．従って $s=r$ である．命題 A) により，系 D から系 D^* への移行(7)は微分可能(解析的)である．全く同様に，系 D' から系 D^* への移行も微分可能(解析的)である．従って，系 D から系 D' への変換もまた微分可能(解析的)である．

もし，D, D' が第1種の標準座標ならば，函数(7)は斉次である(C)参照)；これは $x^1, \cdots, x^r$ として1径数部分群を描く点の座標をとって証明することができる．従って，函数(7)はこのとき斉次1次である(C)参照)．

こうして定理 61 は証明された．

次の命題は定理 61 の重要な結果である．

D)　φ をリー群芽 G からリー群芽 G' の上への局所同型写像，また，D, D' をそれぞれ G, G' における微分可能(解析的)座標系とする．点 $x \in G$ の系 D における座標を $x^1, \cdots, x^r$ で，点 $x' = \varphi(x)$ の系 D' における座標を $x'^1, \cdots, x'^s$ で表わす．即ち

$$x'^j = \varphi^j(x^1, \cdots, x^r), \quad j = 1, \cdots, r. \tag{10}$$

このとき，次のことがわかる．$s=r$，函数 φ^j は3回連続微分可能(解析的)，かつ，$x^1 = \cdots = x^r = 0$ に対して函数行列式 $\left|\dfrac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\right|$ は0でない．特別な場合として，群芽 G の局所自己同型写像はすべて，系 D において方程式(10)によって書表わされ，そこにおける函数 φ^j は3回連続微分可能(解析的)，函数行列式 $\left|\dfrac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\right|_{x^1=\cdots=x^r=0}$ は0ではない．例としては内部自己同型 $\varphi_a(x) = a^{-1}xa$；但し a は群芽 G の一つの定まった元，をとることができる．もし系 D 及び D' が第1種の標準系ならば，函数 φ^j は斉次1次である．

証明のためには，G に新しい微分可能(解析的)座標系 D'' を，点 $x \in G$ の系 D'' における座標として点 $\varphi(x) \in G'$ の系 D' における座標を採って，導入し，系 D と D'' とに対して定理 61 を適用すればよい．

例 78. G を可換リー群として，G に第 2 種の標準座標を導入しよう．座標 t^i を有する点を $g(t^1, \cdots, t^r)$ で表わす．2 元の積が

$$g(s^1, \cdots, s^r)g(t^1, \cdots, t^r) = g(s^1+t^1, \cdots, s^r+t^r)$$

なる式で表わされることは，困難なくわかる．このことは，可換リー群がベクトル群に局所同型なることを示している．

§44. 部分群及び剰余群

この§においては，リー群芽 G の部分群芽 H はまたリー群芽なること，及びこのとき H は G に応じて微分可能もしくは解析的であることを示す．更にまた，リー群芽 G の剰余群芽 G^* がまたすべてリー群芽であり，その際群芽 G から群芽 G^* の上への自然な準同型写像は微分可能な函数によって与えられることも示される．このようにして，ここに，部分群及び剰余群の考察に際しては，利用する函数を微分可能な函数に限定し得ることが確定するのである．

補助定理. H をリー群芽 G の部分群芽とする．そのとき或る近傍 W_γ において定義された次の如き第 2 種の標準座標系(§43, A)参照) D^* ; $t^1, \cdots, t^r$ が存在する．即ち，共通部分 $M_\gamma = W_\gamma \cap H$ は，条件

$$t^1 = \cdots = t^{r-s} = 0 \qquad (1)$$

を満たす元 $(t^1, \cdots, t^r) \in W_\gamma$ 全体より成る，ここに数 s は部分群芽 H によって定められる．この際，M_γ の任意の 2 元 v_1, v_2 に対して積 $v_1^{-1}v_2$, v_1v_2 が定義され，かつそれらは H に属する．

証明. D' を G において構成された第 1 種の標準座標(§42, B)参照)，V をその定義開集合とする．点 $x \in V$ の系 D' における座標を $x^1, \cdots, x^r$ と書く．また，$\alpha > 0$ に対して，不等式

$$x^1x^1 + \cdots + x^rx^r < \alpha^2 \qquad (2)$$

を満たすすべての点 x の集合を U_α で表わす．そのとき，十分小さな正数 β が存在して，不等式 $y^1y^1 + \cdots + y^ry^r \leqq \beta^2$ を満たす任意の $y^1, \cdots, y^r$ に対して y^i を座標とする点 $y \in V$ が存在し，また $\bar{U}_\beta$ の任意の $r+1$ 箇の元の積が定義され，もしこれらの元がすべて H に属するならばそれらの積もまた H に属し(§23, E)

参照)，最後に，集合 $\bar{U}_\beta \cap H$ は $\bar{U}_\beta$ において閉じている．このとき $\beta=1$ と考えてよい(必要があれば座標の相似変換をすればよい)．そして $U_\beta=U$ とおくことにする．

$b \in U \cap H$ とし，b^i を元 b の系 D' における座標とする．$\sqrt{b^1b^1+\cdots+b^rb^r}=\rho$ とおき，もし自然数 m が不等式 $m\rho<1$ を満たすならば，元 $(b)^m$ [即ち元 b の m 乗] は座標 mb^i をもち，かつ H に属する：

$$m\rho<1 \text{ ならば } (b)^m \in H, \tag{3}$$

ことを示そう．このため，方向ベクトルの成分が数 b^i なる如き1径数部分群 g を考える．即ち，$g^i(t)=b^it$, $|t| \leqq \frac{1}{\rho}$ (§42, B)参照)．従って $b=g(1)$．元 $(b)^2, \cdots, (b)^m$ が定義されて，集合 $U \cap H$ に属することを示す．$p<m$ とおき，累乗 $(b)^p$ が定義されてしかも集合 $U \cap H$ に属することが既に証明されているものとする．そのとき積 $(b)^pb=(b)^{p+1}$ は定義されて H に属する．更に，$p+1<\frac{1}{\rho}$ 故，元 $g(p+1)$ は定義されて U に属する．ところが1径数部分群の性質により，それは $(b)^{p+1}$ に等しい．こうして $(b)^{p+1} \in U \cap H$ となり，関係(3)は証明された．

今度は

$$g_1, \cdots, g_k, \qquad k \geqq 0, \tag{4}$$

を1径数部分群の系，その方向ベクトル $a_j=(a_j{}^1, \cdots, a_j{}^r)$；$j=1, \cdots, k$, は正規直交系をなす，即ち，条件

$$\sum_{i=1}^r a_p{}^i a_q{}^i = \delta_{pq} \tag{5}$$

を満たすものとする．ベクトル a_j が単位ベクトル[1]なることから，部分群 g_j は $|t| \leqq 1$ に対して定義され，かつ U 内に含まれる．いま $|t| \leqq 1$ に対して $g_j(t) \in H$, $j=1, \cdots, k$, と仮定し，$k>0$ に対して

$$g(t^1, \cdots, t^k)=g_1(t^1)g_2(t^2)\cdots g_k(t^k), \ |t^j| \leqq 1, \ j=1, \cdots, k, \tag{6}$$

なる形の元全体を H_k と書き，$k=0$ に対しては $H_k=\{e\}$ とおく．このとき次の二つの場合のみが起り得ることを示そう：a)　集合 H_k は群 H の単位元の或る近傍を含む；b)　ベクトル $a_1, \cdots, a_k$ に直交する単位方向ベクトルをもつ

訳註 1)　単位ベクトルとは長さ1のベクトルをいう．

1径数部分群 g_{k+1} で，$|t|\leqq 1$ に対しては $g_{k+1}(t)\in H$ となるものが存在する．

いま，L_k により，U の元でその座標 $x^1, \cdots, x^r$ が1次関係

$$\sum_{i=1}^{r} a_j{}^i x^i = 0,\quad j=1,\cdots,k, \tag{7}$$

を満たすものの全体を表わし，$k=0$ に対しては，$L_k=U$ とおく．更に

$$g(t^1, \cdots, t^k; x) \tag{8}$$

によって，元 $g(t^1, \cdots, t^k)x^{-1}, x\in U$, を表わす．$x$ を固定したとき $|t^j|\leqq 1$, $j=1, \cdots, k$, に対する(8)の形の元全体は，$H_k x^{-1}$ である．e の近くの x に対して，集合 L_k と $H_k x^{-1}$ との共通部分を調べよう．このため元(8)の座標を $g^i(t_1, \cdots, t^k; x)$ と書く．集合 L_k と $H_k x^{-1}$ との交わりを見出だすためには，径数 $t^1, \cdots, t^k$ に関して方程式系

$$\sum_{i=1}^{r} a_j{}^i g^i(t^1, \cdots, t^k; x) = 0, \quad j=1, \cdots, k \tag{9}$$

を解けば十分である．$x=e$ に対しては，この系は自明の解 $t^p=0$, $p=1, \cdots, k$, を有する．この系のヤコビアンを $t^p=0$, $p=1, \cdots, k$; $x=e$, に対して計算しよう．この意味で，まず

$$t=0 \text{ において } \frac{\partial}{\partial t^j} g^i(t^1, \cdots, t^k; x) = \frac{d}{dt} g_j{}^i(t) = a_j{}^i, \tag{10}$$

を得る．そこで，$t^p=0$, $p=1, \cdots, k, x=e$, に対しては，

$$\frac{\partial}{\partial t^j} \sum_{i=1}^{r} a_h{}^i g^i(t^1, \cdots, t^k; x) = \sum_{i=1}^{r} a_h{}^i a_j{}^i = \delta_{hj}$$

((10)及び(5)参照)．従って [$x=e$ においてヤコビアンが0でないから]，e に近い x に対しては，系(9)の解で，初めの解に近く，x に連続に依存するものが，一つ，しかも唯一つに限り存在する．このことは，e に十分近い x に対しては，集合 L_k と $H_k x^{-1}$ との共通部分と e のある近傍との交わりは唯一点であって，かつその点 $\varphi(x)$ は x に連続に依存し，しかも $\varphi(e)=e$ なることを意味する．今度は，仮定 a) が満たされないとしてみよう．そのとき，単位元 e に収束する集合 $H\setminus H_k$ の元の列

$$b_1, \cdots, b_n, \cdots \tag{11}$$

が存在する．$c_n=\varphi(b_n)$ とおく．函数 $\varphi(x)$ は連続であり，かつ $\varphi(e)=e$ であるから，点列

$$c_1, \cdots, c_n, \cdots \tag{12}$$

は e に収束する．この列の点はすべて L_k に属する：何故なら $\varphi(x)\in L_k$. 更に，それらはすべて H に属する．実際，$b_n^{-1}\in U$ 故，$c_n\in H_k b_n^{-1}\subset H$ である．なお，列(12)の元がどれも e には等しくないという重要な事情に注意しておこう．もし $c_n=e$ と仮定すれば，$e\in H_k b_n^{-1}$，よって $b_n\in H_k$ を得，仮定に反する．こうして

$$c_n\in L_k,\quad c_n\in H,\quad c_n\neq e,\quad \lim_{n\to\infty} c_n = e. \tag{13}$$

点列(12)の点 c_n の座標を

$$c_n^i \tag{14}$$

で表わす．更に

$$\rho_n=\sqrt{c_n^1 c_n^1+\cdots+c_n^r c_n^r} \tag{15}$$

とおく．座標

$$\frac{1}{\rho_n}c_n^i = a'^i_n \tag{16}$$

をもつ点を a'_n と書く．点 a'_n は近傍 U の境界と集合 $\bar{L}_k$ の共通部分の上にあり，従って，点列

$$a'_1, \cdots, a'_n, \cdots \tag{17}$$

の極限なる点 a が存在し，その a もまた，集合 $\bar{L}_k$ と近傍 U の境界との共通部分の上にある．a_{k+1}^i によって，点 a の系 D' における座標を表わす．$a\in\bar{L}_k$ 故，この座標は方程式系(7)を満たす．その上，a は近傍 U の境界に属するのであるから

$$a_{k+1}^1 a_{k+1}^1+\cdots+a_{k+1}^r a_{k+1}^r=1$$

である．方向ベクトル $a_{k+1}=(a_{k+1}^1, \cdots, a_{k+1}^r)$ をもつ1径数部分群 g_{k+1} を考える．このベクトルをベクトル $a_1, \cdots, a_k$ に附加えれば，正規直交系を得る．$|t|\leqq 1$ に対しては $g_{k+1}(t)\in H$ なることを示そう．点 $c_n\in H$ は座標 $\rho_n a'^i_n$ ((16)参照) をもつ．このことから点 $(c_n)^m\in H$，かつ，それは，$m\rho_n<1$ ならば座標 $m\rho_n a'^i_n$ をもつ((3)参照)ことが出る．次に t を不等式 $0<t\leqq 1$ を満たす実数とする．点列(17)は a を極限点にもち，かつ $\lim_{n\to\infty}\rho_n=0$ ((13)参照)であるから，正の整数 m, n を適当に選んで，$m\rho_n<1$, $|ta_{k+1}^i - m\rho_n a'^i_n|<\varepsilon$, $i=1, \cdots, r$, となるようにすることができる．ここに ε は前以て与えられた正数である．こうして，

点 $g_{k+1}(t)$ は $(c_n)^m \in \bar{U} \frown H$ なる形の点の極限であり，$\bar{U} \frown H$ がコンパクト故，$g_{k+1}(t) \in H$ である.

このようにして，a) か b) かどちらかの場合が起ることが示された.

上述の帰納的な構成により系 (4) の拡張を $k=0$ から始めて，或る系

$$g_1, \cdots, g_s \tag{18}$$

に達し，この最後の系 (18) においては終に条件 a) が満たされるようになるまで続けて行くことができる. 系 (18) の方向ベクトル $a_1, \cdots, a_s$ は直交条件 (5) によって1次独立である. もし $s<r$ ならば，系 (18) を補って，完全な1次独立系

$$h_1, \cdots, h_{r-s}, \quad g_1, \cdots, g_s \tag{19}$$

にする. §43 の注意 A) により，系 (19) を基礎として，G に，或る開集合 W_γ において定義された第2種の標準座標 D^* を導入することができる (§43, A) 参照). 系 (18) に対しては条件 a) が満たされているのであるから，群 H における単位元の近傍 Γ で，$\Gamma \subset H_s$ なるものが存在する. 十分小さな γ に対しては，$W_\gamma \frown H \subset \Gamma \subset H_s$ を得，W_γ において定義された第2種の標準座標 D^* に対して，補助定理の要求が満たされる.

こうして，補助定理は証明された.

定理 62. G をリー群芽，H をその部分群芽とする. そのとき H もまたリー群芽であり，もし群芽 G が解析的ならば，H も解析的である. 更に，D, E をそれぞれ群芽 G, H の微分可能 (解析的) 座標系，$x^1, \cdots, x^r$ を点 $x \in H$ の系 D における座標，$y^1, \cdots, y^s$ をその同じ点の系 E における座標とし，

$$x^i = \phi^i(y^1, \cdots, y^s), \quad i = 1, \cdots, r \tag{20}$$

とおく. そのとき，函数 ϕ^i は3回連続微分可能 (解析的) で，函数行列 $\left\| \dfrac{\partial \phi^i}{\partial y^j} \right\|$ の階数は s なることがわかる. この後のことから，特に，$s \leqq r$ なることが出る. もし座標系 D, E が第1種の標準座標系ならば，関係式 (20) は1次式の形

$$x^i = \sum_{j=1}^{s} p^i{}_j y^j, \quad i = 1, \cdots, r \tag{20'}$$

を取る.

証明. D^* を，群芽 G 及びその部分群芽 H に対して先の補助定理によって構

成された，開集合 W_γ で定義された第2種の標準座標系とする：共通部分 $M_\gamma = W_\gamma \cap H$ はこの座標系において方程式

$$t^1 = \cdots = t^{r-s} = 0 \tag{21}$$

によって与えられる．もし群芽 G が解析的ならば，座標系 D^* も解析的である（§43, A）参照）．この座標系において乗法法則は

$$z^i = f^i(x^1, \cdots, x^r; y^1, \cdots, y^r), \quad i = 1, \cdots, r \tag{22}$$

なる形に書かれる（§41,（3）参照）．函数 f^i はその変数の十分小さな値に対して定義され，かつ3回連続微分可能（解析的）である．元 $x = (0, \cdots, 0, x^{r-s+1}, \cdots, x^r) \in M_\gamma$ の座標として数 $x^{r-s+1}, \cdots, x^r$ を採って，H に座標系 E^* を導入する．系 E^* においては，部分群 H の元の乗法法則は

$$z^i = f^i(0, \cdots, 0, x^{r-s+1}, \cdots, x^r; 0, \cdots, 0, y^{r-s+1}, \cdots, y^r), \quad i = r-s+1, \cdots, r$$

なる形を取る．こうして，部分群 H はリー群芽であり，もし群芽 G が解析的ならば，それも解析的である．座標系 D^* と E^* とにおいて，関係(20)は

$$x^1 = \cdots = x^{r-s} = 0, \quad x^i = y^i, \quad i = r-s+1, \cdots, r \tag{23}$$

なる形をとる．これと定理61とから，任意の微分可能（解析的）座標系 D, E に対して，函数 ϕ^i が3回連続微分可能（解析的）で，行列 $\left\| \dfrac{\partial \phi^i}{\partial y^j} \right\|$ の階数が s に等しいことが出る．

次に D, E を第1種の標準座標系とする．関係(20)の右辺において，$y^1, \cdots, y^s$ の代りに，1径数部分群を動く点 $g(t)$ の座標 $b^1t, \cdots, b^rt$ を置く．変数 $x^1, \cdots, x^r$ は点 $g(t)$ の系 D における座標なのであるから，$a^1t, \cdots, a^rt$ なる形をとる．こうして函数 ϕ^i は斉次であり，よってまた斉次1次（線型）である（§43, C）参照）．

こうして，定理62は証明された．

A）　G をリー群芽とし，H をその部分群芽，また D^* を補助定理において作られた第2種の標準座標系とする．方程式 $t^{n+1} = \cdots = t^r = 0$，但し $n = r-s$，によって定義される開集合 W_γ の部分集合 L_γ を考える．L_γ の各元は座標

$$t^1, \cdots, t^n, 0, \cdots, 0; \quad |t^i| < \gamma$$

を持ち，数 $t^1, \cdots, t^n$ は，L_γ に定義される新しい系 B^* におけるその座標として採用することができる．各元 $w \in W_\gamma$ は一意に $w = uv$, $u \in L_\gamma$, $v \in M_\gamma$，なる形に表

わせる．ε を $W_\varepsilon W_\varepsilon^{-1} W_\varepsilon \subset W_\gamma$ となるような十分小さな正数とする．各元 $w \in W_\varepsilon$ に対して $W_\varepsilon \frown wH = uM_\varepsilon$ を得る；ここで $u \in L_\varepsilon$ は一意に定義される．このように，群芽 G の部分群芽 H に関する各左剰余類 $W_\varepsilon \frown wH, w \in W_\varepsilon$, は L_ε に交わり，しかも唯一つの点 u において交わる．この元 u の系 B^* における座標は，W_ε と交わるすべての剰余類より成る空間 G/H (§23, J) 参照) の開集合 K_ε において定義される或る座標系 C^* における，剰余類 wH の座標として採用することができる．

$g_1, \cdots, g_r$ を第2種の標準座標系 D^* 構成の基礎にとった1径数部分群 (§43, A)参照) とする．各元 $w \in W_\gamma$ は一意に

$$w = g_1(t^1) g_2(t^2) \cdots g_r(t^r), \; |t^i| < \gamma \tag{24}$$

なる形に書表わされる．$u = g_1(t^1) g_2(t^2) \cdots g_n(t^n)$, $v = g_{n+1}(t^{n+1}) g_{n+2}(t^{n+2}) \cdots g_r(t^r)$ とおく．そのとき

$$w = uv, \quad u \in L_\gamma, \quad v \in M_\gamma. \tag{25}$$

分解(24)の一意性から分解(25)も一意的である．次に $w \in W_\varepsilon$ とする．(25)により $w = uv$, $u \in L_\varepsilon$, $v \in M_\varepsilon$. 共通部分 $W_\varepsilon \frown wH$ を考える．$h \in H$ が条件 $wh \in W_\varepsilon$ を満たすならば，$h \in W_\varepsilon^{-1} W_\varepsilon$, $vh \in W_\varepsilon W_\varepsilon^{-1} W_\varepsilon \subset W_\gamma$, よって $vh \in M_\gamma$. 所が $u(vh) \in W_\varepsilon$ 故，$vh \in M_\varepsilon$. こうして $wh = u(vh) \in uM_\varepsilon$, 従って $W_\varepsilon \frown wH \subset uM_\varepsilon$ となる．次に逆の包含関係を証明する．$v' \in M_\varepsilon$ として，方程式 $uv' = wh$ を h に関して解く．u を約して $v' = vh$ を得る．これより $h = v^{-1}v'$: 元 v と v' とは M_ε に属す故，その積 $v^{-1}v'$ は定義されて，H に属す(補助定理参照)．こうして $uM_\varepsilon \subset W_\varepsilon \frown wH$ を得，等式 $uM_\varepsilon = W_\varepsilon \frown wH$ が証明された．先の関係によって定義された元 u の一意性は，分解(25)の一意性から出る．

こうして，命題 A) は証明された．

定理 63. G をリー群芽，F をその剰余群芽，χ を群芽 G から群芽 F の上への自然な写像とする．そのとき，F はリー群芽であり，もし群芽 G が解析的ならば，それも解析的である．更に，D, C をそれぞれ群芽 G, F における微分可能(解析的) な座標系，$y^1, \cdots, y^r$ を点 $y \in G$ の系 D における座標，$x^1, \cdots, x^n$ を点 $\chi(y)$ の系 C における座標とし，

$$x^i = \chi^i(y^1, \cdots, y^r), \quad i = 1, \cdots, n \tag{26}$$

とおく．そのとき，函数 χ^i は3回連続微分可能（解析的）であり，函数行列 $\left\| \dfrac{\partial \chi^i}{\partial y^j} \right\|$ の階数は n である．このことから，特に，$n \leqq r$ である．もし座標系 D, C が第1種の標準座標系ならば，関係(26)は1次形式

$$x^i = \sum_{j=1}^{r} q^i{}_j y^j, \quad i = 1, \cdots, n \tag{26'}$$

である．

証明. H を準同型写像 χ の核，D^* を命題 A) で述べた第2種の標準座標系とする．系 D^* において乗法法則は

$$z^i = f^i(x^1, \cdots, x^r; y^1, \cdots, y^r), \quad i = 1, \cdots, r \tag{27}$$

なる形を取るものとしよう．函数 f^i は3回連続微分可能（解析的），（§43, A) 参照）である．剰余群芽 F に A) で指示された座標系 C^* を導入する．即ち，剰余類 uH, $u \in L_\varepsilon$, の座標として，元 u の系 B^* における座標を採る．x, y を，L_ε の二つの元で，$z = xy \in W_\varepsilon$ となるように十分単位元に近いものとする．元 x の系 B^* における座標を $x^1, \cdots, x^n$, 元 y の同じ系における座標を $y^1, \cdots, y^n$ とし，元 z の系 D^* における座標を $z^1, \cdots, z^r$ とおく．x^*, y^*, z^* によって，それぞれ x, y, z を含む剰余類を表わすことにする．そのとき，元 x^*, y^*, z^* の系 C^* における座標は，それぞれ $x^1, \cdots, x^n; y^1, \cdots, y^n; z^1, \cdots, z^n$ であり，

$$z^i = f^i(x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0; y^1, \cdots, y^n, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, \cdots, n$$

となる．このように，群芽 F の元の座標系 C^* における乗法法則は3回連続微分可能（解析的）であり，よって F はリー群芽，もし G が解析的ならば F もまた解析的，である．もし $y^1, \cdots, y^r$ が元 $y \in G$ の系 D^* における座標，$x^1, \cdots, x^n$ が元 $\chi(y)$ の系 C^* における座標であるとすれば，

$$x^i = y^i, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{28}$$

このように，座標系 D^*, C^* においては函数 χ^i は極めて簡単な形(28)を持ち，これに対して定理の主張は明らかに満たされる．このことと定理61とから，函数 χ^i に関する定理63の主張が，任意の微分可能（解析的）座標系 D, C に対しても満たされることが導かれる．

次に，D, C を第1種の標準座標系とする．関係式 (26) における変数 $y^1, \cdots, y^r$ に，1径数部分群を動く元 $g(t)$ の座標 $b^1t, \cdots, b^rt$ を代入すれば，変数 $x^1, \cdots, x^n$ は $a^1t, \cdots, a^nt$ の形となる：元 $\chi(g(t))$ もまた1径数部分群上を動くからである．従って，§43の命題C)により，函数 χ^i は斉次1次(線型)である．

このようにして，定理63は証明された．

定理61，62及び63は，今後リー群の研究に際して，我々の考察を微分可能な函数に限定し得ることを示すものである．

ここで，定理62の一つの極めて重要な結果を導こう．

B) G を，0でない行列式を持つ，すべての n 次複素正方行列の作る位相群(§31, A)参照)とする．G は解析的なリー群になることがわかる．従って，定理62により，群 G の部分群芽はすべてまた解析的なリー群芽である[1]．

群 G に座標を導入するために，行列 $x \in G$ を

$$x = e + \| x^j{}_k \| + i x'^j{}_k \| \tag{29}$$

なる形に書表わす．但し，e は単位行列，$i = \sqrt{-1}$，また $x^j{}_k$ 及び $x'^j{}_k$ は実数である．これらの数を行列 x の座標として採用する．このことから，G の次元は $2n^2$ であることが知られる．x, y 及び z を三つの行列で，$z = xy$ とすれば，この関係は座標の形では

$$\begin{aligned} z^j{}_k &= x^j{}_k + y^j{}_k + x^j{}_\alpha y^\alpha{}_k - x'^j{}_\alpha y'^\alpha{}_k, \\ z'^j{}_k &= x'^j{}_k + y'^j{}_k + x^j{}_\alpha y'^\alpha{}_k + x'^j{}_\alpha y^\alpha{}_k \end{aligned} \tag{30}$$

となる．この関係式の右辺は $x^j{}_k$ と $y^j{}_k$ との解析函数であるから，群 G は解析的なリー群である．

例 79. G を，0でない行列式を持つすべての n 次実正方行列のなす群，H を，すべての直交行列よりなる群 G の部分群，F をすべての0でない実数の作る乗法群，また χ を，各行列 $w \in G$ にその行列式を対応させる，群 G から群 F の上への準同型写像とする．準同型写像 χ の核 N は，行列式が1なるすべての行列より成る．行列 w の第1種の標準座標系として，行列 $x = \log w$ (例

訳註 1) 位相群または群芽の部分群(芽)という場合には閉じたものだけを考えていることに注意．

77 参照)の要素 x_{ij} を採ることができる．元 $v\in F$ の標準座標としては，容易にわかるように，数 $y=\log v$ が採れる(群 G, F における標準座標は，無論，単位元の十分小さな近傍においてのみ定義される)．ここに選んだ標準座標においては，部分群 H は1次方程式

$$x_{ij}+x_{ji}=0,\quad i,j=1,\cdots,n \tag{31}$$

によって特徴附けられ（定理 62, (20′)参照)，また準同型写像 χ は関係式

$$y=\mathrm{Sp}(x)=\sum_{i=1}^{n}x_{ii} \tag{32}$$

によって与えられ（定理 63, (26′)参照)，よって部分群 N は方程式

$$\mathrm{Sp}(x)=0$$

によって特徴附けられることがわかる．部分群 H を考えよう．行列 u を転置して得られる行列を u^* で表わす．§42 の関係(28)から容易に

$$(\exp(x))^*=\exp(x^*) \tag{33}$$

が従う．行列 x は関係(31)を満足する；即ち，歪対称であるとする．そのとき $x^*=-x$. 関係(33)より

$$(\exp(x))^*=\exp(x^*)=\exp(-x)=(\exp(x))^{-1}$$

となる．このように，もし行列 x が歪対称ならば，行列 $\exp(x)$ は直交行列である(例3参照)．逆に，もし $w\in W_\varepsilon$ が直交行列ならば

$$x^*=(\log(w))^*=\log(w^*)=\log(w^{-1})=-\log(w)=-x,$$

即ち，行列 x は歪対称である．こうして，単位元の近くでは，部分群 H は関係(31)によって特徴附けられる．

次に，準同型写像 χ を考察する．行列 u の要素 u_{ij} が $i<j$ に対して $u_{ij}=0$ なる条件を満たすとき，u を**3角行列**という．周知の如く，各正方行列 x に対して，0でない行列式を持つ(一般には複素)行列 t を適当に選んで，行列 txt^{-1} が3角行列になるようにすることができる．§42 の関係(28)より直ちに

$$\exp(txt^{-1})=t(\exp(x))t^{-1}$$

が出る．明らかに，行列 twt^{-1} の行列式は行列 w の行列式に等しい．行列 txt^{-1} のシュプールが行列 x のシュプールに等しいことも，容易に検証される．

$$\mathrm{Det}(\exp(x))=e^{\mathrm{Sp}(x)} \tag{34}$$

なることを証明しよう(ここに，eは自然対数の底で，群の単位元ではない)．3角行列xに対しては，この関係は§42, (28)より直ちに出るが，各行列xは変換によって3角行列にすることができるのであるから，行列式とシュプールの変換に関する不変性から，(34)なる関係が一般の場合にも正しいことがわかる．関係(34)より直ちに関係(32)が出る．

§45.　リー群及び解析多様体

座標を導入することにより，空間における点の位置を数の組即ちその座標を与えることによって定義することができ，また逆に数の組を空間の点と見做すことができる．こうして，座標の方法は，代数学及び解析学の幾何学への応用の可能性，そしてまた，非幾何学的な対象を幾何学的に解釈することの可能性を啓示する――ここに，数学に対するその極めて大きな意義がある．座標法はEuclid空間においては何ら面倒なことはない：そこには，点と数の組との間に1対1の対応が存在するのである．他の空間においては，問題は同様ではない．例えば，地球表面上の地理学的座標は，それ程完全なものではない．経度は単に0°から360°までを変り得るに過ぎず(また，0°と360°は一致するものと考える必要があり)，緯度は単に－90°から＋90°までを変るに過ぎず，また，極においては，経度は全然定義されない．このように，地理学的な座標は，地球表面上の点と数の組との間の1対1対応を実現しない．これは，地理学的座標の選び方が悪かったからではなく，球面の上では，Euclid空間の場合のような完全な座標を選ぶことが原理的に不可能であることに由来するのである．一般に，もし空間がEuclid空間に同相でないならば，そこに，Euclid空間におけるように完全に，単一の座標系を導入することは不可能である．しかし，幾何学自体においても，数学，自然科学の他の分野(代数学，力学，その他)においても，我々はEuclid空間に同相でない空間に遭遇する．これらの，より一般的な空間においても，やはり座標を利用することが望ましい，が全空間に単一の座標系を導入することは不可能である．そのためには，**局所座標**，即ち，空間の個々の部分においてのみ定義された座標系，を利用するのが適当である．二つ

以上の局所座標系が交錯する部分においては，それらの座標は互に一つの変換式によって関係附けられる．その変換に対しては，事情に応じて，種々の条件を附けることが適当である．時としてはそれは十分な回数だけ微分可能である必要があり，また時としては解析的なることを必要とする．相異なる局所座標系の間の関係についてこのような条件をつけることにより，新たな概念即ち**微分可能多様体**或は**解析多様体**の概念が生じてくる．この§においては，これらの概念の厳密な定義を与え，また，リー群と同じく，そこでリー群が推移的な連続変換群として作用する空間も，自然な方法で解析多様体となることを証明する．

A)　可算基を有する位相空間において，その各点に，r 次元 Euclid 空間の開集合に同相な近傍が存在するとき，その空間を **r 次元位相多様体**という．明らかに，位相多様体は局所コンパクトであり，かつ局所連結である(定義19及び§15, H)参照)．コンパクトな位相多様体を**閉じている**という．

B)　U を r 次元 Euclid 空間の或る開集合に同相な位相空間，φ を空間 U から r 次元 Euclid 空間 E^r の開集合の上への或る一つの同相写像，E^r には座標が導入されているものとする．点 $x \in U$ の座標として点 $\varphi(x) \in E^r$ の座標を採れば，これによって空間 U に或る**座標系** D が導入される．D, D' が空間 U に上述の方法で導入された二つの座標系であるとき，点 $x \in U$ の系 D における座標 $x^1, \cdots, x^r$ とその同じ点 x の系 D' における座標 $x'^1, \cdots, x'^r$ とは

$$x'^i = g'^i(x^1, \cdots, x^r), \quad i = 1, \cdots, r, \tag{1}$$

$$x^i = g^i(x'^1, \cdots, x'^r), \quad i = 1, \cdots, r, \tag{2}$$

のような関係で結ばれている．ここに，g'^i 及び g^i は連続函数である．もし函数 g'^i 及び g^i が微分可能ならば，函数行列式 $\left|\dfrac{\partial g'^i}{\partial x^j}\right|$ 及び $\left|\dfrac{\partial g^i}{\partial x'^j}\right|$ は，それらの積が1に等しい故，0ではない．m を或る固定した自然数，或は ∞ とする．陰函数の存在定理により，もし函数 g'^i が m 回連続微分可能(解析的)で，函数行列式 $\left|\dfrac{\partial g'^i}{\partial x^j}\right|$ が各点 $x \in U$ において 0 でないならば，函数 g^i もまた m 回連続微分可能(解析的)となる．函数 g'^i 及び g^i が m 回連続微分可能(解析的)なるとき，座標系 D, D' は **C^m 級同値(解析的同値)**であるという．また，U において，座標系の一つの C^m 級(解析的)同値類が指定されている場合，U を **C^m 級微分可**

能(解析的)座標空間という．U に C^m 級(解析的)同値類を与えるためには，その類に属する一つの座標を指定すれば十分である．もし U が C^m 級微分可能(解析的)座標空間ならば，そこにおける**座標系**というとき，常に，指定された特定の同値類に属する座標系を意味するものとする．U を C^m 級微分可能(解析的)座標空間，φ を，空間 U から Euclid 空間の或る開集合の上への，U に座標を設定する写像であるとする．W が空間 U の開集合なるとき，写像 φ は W にも座標系を定義する．これにより，W もまた C^m 級微分可能(解析的)な座標空間となる．それを，C^m 級微分可能(解析的) **座標空間 U の開部分空間**という．

定義 40. r 次元位相多様体 M の開被覆 Σ が **C^m 級微分可能(解析的)**であるとは，被覆 Σ の各開集合が C^m 級微分可能(解析的)座標空間であり，また，被覆 Σ の任意の 2 開集合の交わり $W=U\frown V$ が，もしそれが空でないならば，それを座標空間 U の開部分空間とみるか，或は座標空間 V の開部分空間と見るかに関係なく，同一の C^m 級微分可能(解析的)座標空間となることをいう．後の方の要求は，U によって W に誘導される微分可能性(解析性)と，V によって W に誘導される微分可能性(解析性)とが一致することを意味する．多様体 M の二つの C^m 級微分可能(解析的)被覆 Σ と Σ' とが **C^m 級(解析的)同値**であるとは，被覆 $\Sigma\smile\Sigma'$ が C^m 級微分可能(解析的)なることをいう．また，位相多様体 M において，その被覆の C^m 級(解析的)同値類が一つ指定されているとき，M に **C^m 級微分可能性(解析性)**[または **C^m 構造(解析構造)**]が設定されているという．位相多様体に C^m 級微分可能性(解析性)が設定されているとき，その多様体を **C^m 級微分可能(解析的)**であるという．

M が微分可能(解析的)多様体なるとき，M の微分可能(解析的)な被覆というときは常にその定義において指定された類に属する微分可能(解析的)被覆を意味する．M を微分可能(解析的)多様体，Σ をその一つの微分可能(解析的)被覆，U を被覆 Σ の或る開集合，また D を U において作られた或る座標系とする．このとき系 D を M における**局所座標系**という．D' を開集合 U' で定義された，M における別の局所座標系，また，$x^1, \cdots, x^r$ 及び $x'^1, \cdots, x'^r$ を，それぞれ系 D 及び D' における，点 $x\in U\frown U'$ の座標とすれば，

$$x'^i = h'^i(x^1, \cdots, x^r), \quad i = 1, \cdots, r, \tag{3}$$

$$x^i = h^i(x'^1, \cdots, x'^r), \quad i = 1, \cdots, r, \tag{4}$$

ここに，函数 h'^i 及び h^i は m 回連続微分可能(解析的)である．

定義 41. P 及び Q を，それぞれ次元が r 及び s の，C^m 級微分可能(解析的)多様体，φ を多様体 P から多様体 Q の中への連続写像，また $x_0 \in P$ とする．更に D を点 x_0 の近傍で定義された或る局所座標系，E を点 $y_0 = \varphi(x_0)$ の近傍において定義された或る局所座標系，また x を，系 D において点 x の座標 $x^1, \cdots, x^r$ が定義され，系 E において点 $y = \varphi(x)$ の座標 $y^1, \cdots, y^s$ が定義されるように十分 x_0 に近く取った点として，

$$y^j = \varphi^j(x^1, \cdots, x^r), \ j = 1, \cdots, s \tag{5}$$

とおく．もし函数 φ^j が点 x_0 の近くで m 回連続微分可能 (解析的) ならば，写像 φ は点 x_0 において**微分可能(解析的)**であるという．写像 φ が各点 $x_0 \in P$ において微分可能(解析的)なるとき，φ を**微分可能(解析的)**であるという．φ が同相写像(定義 14 参照)であり，かつ φ 及び φ^{-1} が微分可能(解析的)なるとき，写像 φ を**微分可能(解析的)な同相写像**という．

C) M_1 及び M_2 を，次元がそれぞれ r_1 及び r_2 なる二つの C^m 級微分可能(解析的) 多様体，Σ_1 及び Σ_2 を，それぞれ多様体 M_1 及び M_2 における微分可能性(解析性)を定義する被覆であるとし，また $P = M_1 \times M_2$ を多様体 M_1 と M_2 との直積(§ 14, A)参照)とする．更に，D_1 を開集合 $U_1 \in \Sigma_1$ において定義された座標系，D_2 を開集合 $U_2 \in \Sigma_2$ において定義された座標系とする．点 $x_1 \in U_1$ の系 D_1 における座標を $x_1{}^1, \cdots, x_1{}^{r_1}$, また点 $x_2 \in U_2$ の系 D_2 における座標を $x_2{}^1, \cdots, x_2{}^{r_2}$ と表わす．近傍 $U_1 \times U_2$ において，点 $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ の座標として数 $x_1{}^1, \cdots, x_1{}^{r_1}, x_2{}^1, \cdots, x_2{}^{r_2}$ を採り，そこに座標系 D を導入する．すべての開集合 $U_1 \times U_2$, $U_1 \in \Sigma_1$, $U_2 \in \Sigma_2$, よりなる多様体 P の被覆 Σ が，C^m 級微分可能(解析的)な被覆であることは，容易に検証できる．こうして得られた微分可能(解析的)多様体 P を，微分可能(解析的)な多様体 M_1 と M_2 との**直積**と称する．次に，Q を或る C^m 級微分可能(解析的)多様体，φ を 2 変数 $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ の函数で，Q における値を取るものとする．φ が多様体 P から多様体 Q の中への微分可能(解析的)

な写像を与えるならば，函数 φ を**微分可能**(**解析的**)であるという．

下記の定理64, 65, 66は，単に解析的なリー群に対してのみ証明するが，それらはそのまま，微分可能なリー群に対しても証明できる：そのためには，多様体及び函数の解析性の代りに，それらの C^3 級微分可能性を取る．解析的なリー群だけを考えても，実際には考察の対象を狭めることにはならない．それは第10章の結果によって，すべてのリー群に解析的な座標を導入し得るからである．

定理64. 解析的なリー群は位相多様体であって，そこには，函数 $\varphi(x, y) = xy^{-1}$ が解析的(C)参照)になるような解析性を，一意的に設定することができる．

証明. D を群 G の単位元 e の近傍 U において定義された或る解析的座標系，V を十分小さな単位元の近傍で，その任意の3元 x_1, x_2, x_3 に対して積 $x_1x_2^{-1}x_3$ が定義され，かつそれが U に属するものとする．開集合 aV, $a\in G$, において，点 $ax\in aV$ の座標として点 x の系 D における座標を採って，座標系 aD を導入する．すべての開集合 $aV, a\in G$, よりなる被覆 Σ が，多様体 G の解析的な被覆であることを示そう．開集合 aV と bV とが交わるものとする．この場合，aV と bV を取換えて論じてもよいから，方程式 $ax = by, x\in V$, によって定義される元 $y\in V$ の系 D における座標が，系 D における元 x の座標の解析函数なることを示せば十分である．そこで，$b^{-1}a = yx^{-1}\in VV^{-1}$. こうして元 $b^{-1}a$ の座標は系 D において定義され，関係 $y = b^{-1}ax$ により元 y の座標は元 $b^{-1}a$ 及び x の座標の解析函数として表わされる．このようにして，多様体 G に解析性が設定される．

今度は，G に導入した解析性によって函数 φ が解析的になることを示そう．$x_0\in G, y_0\in G, z_0 = x_0y_0^{-1}$，また x 及び y を e に近い2元とする．ここで，方程式 $z_0z = x_0x\,(y_0y)^{-1}$ から定義される点 z の系 D における座標が，点 x 及び y の系 D における座標の解析函数なることを示せばよい．$z = y_0(xy^{-1})y_0^{-1}$ であって，元 $y_0(xy^{-1})y_0^{-1}$ の座標は元 xy^{-1} の座標の解析函数である(§43, D)参照)．そして，この元 xy^{-1} の座標は元 x 及び y の座標の解析函数である(§41, A)参照)．こうして，函数 φ の解析性が証明された．

被覆 Σ によって与えられた多様体 G の解析性を**第 1 の**解析性と呼ぶ．**第 2 の**解析性が存在して，そこで函数 φ が解析的になるものと仮定しよう．函数 φ の解析性から写像 $x \to x^{-1}$ が解析的な同相写像なることが出，また，このことと今度は函数 φ の性質とから，函数 $f(x, y) = xy$ が解析的なることが従い，このことから，最後に，写像 $x \to ax$ が解析的な同相写像なることが出る．D' を第 2 の解析性の任意の局所座標系で，e を原点とするものとする．函数 f が解析的なることから，定理 61 によって，座標系 D と D' とは e の近くで互に解析的な変換によって移り得ることになる．$a \in G$ とし，また A を点 a の近傍において定義された，第 2 の解析性の局所座標とする．系 D から系 aD を作ったのと同様に，座標系 D' から(点 a の近傍において) 系 aD' を構成する．写像 $x \to ax$ は解析的な同相写像であるから，系 A と aD' とは点 a の近傍において互に解析的な変換によって移り得る．系 D と D' との間の既に確かめられた関係から，系 aD と aD' とがまた，点 a の近くで互に解析的な変換によって移り得ることがわかる．こうして，座標系 aD と A とは点 a の近くで互に解析的な変換によって移り得る．点 a は任意であったから，これによって第 1 及び第 2 の解析性が一致することが証明された．

かくて定理 64 は完全に証明された．

定理 65. G を解析的なリー群芽，H をその部分群芽，G/H を左剰余類の空間(§ 23, J) 参照)，D を G において定義された或る解析的な座標系，また C を G/H において定義された或る座標系で，点 H に原点を持つものとする．更に，$x \in G$, $\Xi \in G/H$ をそれぞれ e 及び H に十分近い元で，系 D における元 x の座標 $x^1, \cdots, x^r$ 及び系 C における元 Ξ の座標 $\xi^1, \cdots, \xi^n$，及び元 $\Theta = x\Xi$ の系 C における座標 $\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n$ が共に定義されるものとし，

$$\begin{aligned}\vartheta^i &= \varphi^i(\Xi\ ;\ x) = \varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n ; x) \\ &= \varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n ; x^1, \cdots, x^r),\quad i = 1, \cdots, n \qquad (6)\end{aligned}$$

とおく．そのとき，それに対して函数 φ^i が解析的になるような座標系が G/H に存在することが判る：その 1 例として § 44, 命題 A) で作った系 C^* を取ることができる．更に，これらの性質を持つ系 C の中の任意の二つは，互に解析的

な変換によって移り得ることが判る.

函数 φ^i の性質は一つの解析的な座標系 D から他のかかる系への移行に際し,解析的には変えられないということに注意しておこう(定理 61 参照).

証明. D^* 及び C^* をそれぞれ G 及び G/H に対して § 44 の命題 A) において作られた座標系とし,座標系 D^* における乗法法則が函数 $f^1, \cdots, f^r$ によって与えられるものとする(§ 41, (3)参照). これらの函数は解析的である(§ 43, A)参照). $x^1, \cdots, x^r$ を系 D^* における元 x の座標とする. $\Xi = \xi H$, $\xi \in L_\varepsilon$, とおき, $\xi^1, \cdots, \xi^n, 0, \cdots, 0$ を元 ξ の系 D^* における座標とする. そのとき, $\xi^1, \cdots, \xi^n$ は元 Ξ の系 C^* における座標である. また $\vartheta = x\xi$ とおき, $\vartheta^1, \cdots, \vartheta^r$ を元 ϑ の系 D^* における座標とする;そのとき $\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n$ は元 $\Theta = x\Xi = x\xi H$ の系 C^* における座標である. よって

$$\vartheta^i = f^i(x^1, \cdots, x^r; \xi^1, \cdots, \xi^n, 0, \cdots, 0), \ i = 1, \cdots, r. \qquad (7)$$

こうして,我々が特に選んだ系 D 及び C $(D = D^*, C = C^*)$ に対しては,

$$\varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n; x^1, \cdots, x^r) = f^i(x^1, \cdots, x^r; \xi^1, \cdots, \xi^n, 0, \cdots, 0), \ i = 1, \cdots, n,$$

となり,よって函数 φ^i は解析的である.

今度は C' を点 H に原点を持つ G/H における任意の座標系とし,系 D^*, C' において(6)なる関係が

$$\begin{aligned}\vartheta'^i = \varphi'^i(\Xi; x) &= \varphi'^i(\xi'^1, \cdots, \xi'^n; x) \\ &= \varphi'^i(\xi'^1, \cdots, \xi'^n; x^1, \cdots, x^r), \ i = 1, \cdots, n,\end{aligned} \qquad (8)$$

なる形になるものとする. 函数 φ'^i が解析的なるものと仮定して,系 C^*, C' が互に解析的な変換で移り得ることを示そう. 先ず第一に

$$\xi'^i = \varphi'^i(\vartheta'^1, \cdots, \vartheta'^n; x^{-1})$$

なることに注意しよう. こうして

$$\left| \frac{\partial \varphi'^i(\xi'^1, \cdots, \xi'^n; x)}{\partial \xi'^j} \right| \neq 0. \qquad (9)$$

このことは系 D^* と C^* とに関しても成立し,

$$\left| \frac{\partial \varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n; x)}{\partial \xi^j} \right| \neq 0. \qquad (10)$$

元 Ξ の系 C^* 及び C' における座標をそれぞれ $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 及び $\xi'^1, \cdots, \xi'^n$ で表わ

し

$$\xi'^i = \psi^i(\Xi) = \psi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n),\ i = 1, \cdots, n \tag{11}$$

とおく．ここで函数 ψ^i が解析的なること及び函数行列式 $\left|\dfrac{\partial\psi^i}{\partial\xi^j}\right|$ が変数値 0 に対して 0 でないことを証明すればよい．

初めに函数 ψ^i が解析的なることを示す．ξ を群芽 G の元で，その系 D^* における座標が $\xi^1, \cdots, \xi^n,\ 0, \cdots, 0$ なるものとする．そのとき，$\Xi = \xi H$ で，元 $H \in G/H$ の系 C' における座標は 0 に等しい故，(8) より

$$\xi'^i = \varphi'^i(0, \cdots, 0\,; \xi^1, \cdots, \xi^n, 0, \cdots, 0)$$

を得る．こうして，$\psi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n) = \varphi'^i(0, \cdots, 0\,; \xi^1, \cdots, \xi^n, 0, \cdots, 0)$，よって函数 ψ^i は解析的である．

次に

$$\left|\frac{\partial\psi^i(0, \cdots, 0)}{\partial\xi^j}\right| = 0 \tag{12}$$

と仮定して，そのとき，十分小さな数 $\delta > 0$ が存在し

$$|\xi_i| < \delta,\ i = 1, \cdots n,\ \text{ならば} \left|\frac{\partial\psi^i}{\partial\xi^j}\right| = 0$$

となることを示そう．この否定を仮定してみる：即ち，元 H に任意に近い所に

$$\left|\frac{\partial\psi^i(\Theta_0)}{\partial\xi^j}\right| \neq 0 \tag{13}$$

となるような元 Θ_0 が存在するものと仮定する．$\Theta_0 = x_0 H, x_0 \in L_\varepsilon$，とおく．更に，$\Xi$ を H に近い元，$\Theta = x_0 \Xi$ とおく．元 Ξ の系 C^* 及び C' における座標をそれぞれ $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 及び $\xi'^1, \cdots, \xi'^n$ で表わし，元 Θ の系 C^* 及び C' における座標をそれぞれ $\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n$ 及び $\vartheta'^1, \cdots, \vartheta'^n$ で表わす．そのとき

$$\xi'^i = \varphi'^i(\vartheta'^1, \cdots, \vartheta'^n; x_0^{-1})\ ;\ \vartheta'^i = \psi^i(\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n);$$

$$\vartheta^i = \varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n\,; x_0).$$

上記三つの変換の函数行列式は，$\xi^1 = \cdots = \xi^n = 0$ に対して 0 にはならない ((9)，(13)，(10) 参照)．それらを逐次適用した結果として変換 $\xi'^i = \psi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n)$ を得る故，$\xi^1 = \cdots = \xi^n = 0$ に対して函数行列式 $\left|\dfrac{\partial\psi^i}{\partial\xi^j}\right|$ もまた 0 でない．ところがこれは仮定(12)に矛盾する．こうして，もし条件(12)が満たされ

るならば

$$|\xi^j|<\delta,\ j=1,\cdots,n,\ \text{に対しては}\left|\frac{\partial\psi^i(\xi^1,\cdots,\xi^n)}{\partial\xi^j}\right|=0, \tag{14}$$

なる如き $\delta>0$ の存在が証明された．次に，関係 (14) が満たされているものと考えて，この仮定から矛盾を導こう．そうすれば

$$\left|\frac{\partial\psi^i(0,\cdots,0)}{\partial\xi^j}\right|\neq 0$$

なることが証明されることになる．

解析学の古典的な理論によって条件(14)から函数 $\psi^1,\cdots,\psi^n$ の従属関係が出る．更に正確には，条件(14)から次のことが言える：座標原点にいくらでも近い所に点 $\Xi_0=(\xi_0{}^1,\cdots,\xi_0{}^n)$ をとって，その或る近傍 U においては，函数 ψ^i の中の一つ，例えば ψ^1 が，残りの函数によって表わされる，即ち，

$$\psi^1=\Psi(\psi^2,\cdots,\psi^n) \tag{15}$$

なる関係が成立する．ここで Ψ は，その変数の 1 価連続な函数である．この定理から結論を導く．$\xi_0'^1,\cdots,\xi_0'^n$ を点 Ξ_0 の系 C' における座標とし，Ξ_1 を開集合 U の点で，その系 C' における座標 $\xi_1'^1,\cdots,\xi_1'^n$ が条件

$$\xi_1'^1\neq\xi_0'^1,\xi_1'^2=\xi_0'^2,\cdots,\xi_1'^n=\xi_0'^n \tag{16}$$

を満たすものとする．$\xi_1{}^1,\cdots,\xi_1{}^n$ を点 Ξ_1 の系 C^* における座標とする．そのとき

$$\xi_1'^i=\psi^i(\xi_1{}^1,\cdots,\xi_1{}^n),\ i=1,\cdots,n. \tag{17}$$

関係(15)，(16)及び(17)より，$\xi_1'^1=\xi_0'^1$．しかしこれは関係(16)の初めのものに矛盾する．

かくして定理 65 は完全に証明された．

定理 66.　G を解析的なリー群で，可算基を持つ局所コンパクトな空間 Γ の上の推移的な連続変換群になっているものとする（定義 31 参照）．そのとき，Γ は位相多様体であって，その中に，函数 $\sigma(x,\xi)=x^*(\xi)$, $x\in G$, $\xi\in\Gamma$，が解析的（C)参照）になるような解析性を，一意に導入することができる．

証明.　定理 20 により，対 G,Γ は対 $G,G/H$ に相似である；但し H は一点に

関する固定変換部分群．従って定理は対 $G, G/H$ について証明すればよい．群 G の単位元 e の近傍及び空間 G/H の元 H の近傍において，§44 の命題 A)で考察した座標系 D^* 及び C^* を導入する．$\Xi_0 = aH$ とおく．元 Ξ_0 の近傍 $a^*(K_\varepsilon)$ に，元 $a\Xi, \Xi \in K_\varepsilon$, の座標として元 Ξ の系 C^* における座標を採用して，座標系 aC^* を導入する．換言すれば，元 $a\Xi$ を $a\xi H, \xi \in L_\varepsilon$, の形に書いて，元 $a\Xi$ の系 aC^* における座標として，元 ξ の系 D^* における座標の初めの n 箇を取るのである．すべての座標近傍 $a^*(K_\varepsilon), a \in G$, より成る被覆 Σ が解析的な被覆であることを示そう．

初めに，a, b を G の二つの元で，$aH = bH = \Xi_0$ となるものとする．そのとき，元 Ξ_0 の近傍において二つの座標系 aC^* と bC^* とが定義される．これらの系は Ξ_0 の近くにおいて互に解析的な変換によって移り得ることを示す．ここで系 aC^* と bC^* との占める位置は同等であるから，もし元 $\xi \in L_\varepsilon$ が e に近いならば，$b\vartheta H = a\xi H$ なる関係から定義される元 $\vartheta \in L_\varepsilon$ の系 B^* における座標が，元 ξ の系 B^* における座標の解析函数によって表わされることを証明すれば十分である．関係 $b\vartheta H = a\xi H$ から，$b\vartheta h = a\xi$, 但し $h \in H$, が出る．a と b とを固定したとき，元 ϑ 及び h は元 ξ の 1 価函数である．$\xi = e$ に対して元 h は h_0 なる値を取るものとする；そのとき，e に近い ξ に対しては，元 h は vh_0 ; $v \in M_\varepsilon$, なる形となる．こうして，$\vartheta v = b^{-1}a\xi h_0^{-1}$ を得，$h_0 = b^{-1}a$ なる故，$\vartheta v = h_0 \xi h_0^{-1}$ となる．§43 の命題 D)により，元 $h_0 \xi h_0^{-1}$ の系 D^* における座標は，元 ξ の解析函数であり，元 ϑ の系 B^* における座標は，元 $\vartheta v = h_0 \xi h_0^{-1}$ の座標の初めの n 箇に等しい．

次に，c_1, c_2 を G の 2 元で，それに対し開集合 $c_1^*(K_\varepsilon)$ と $c_2^*(K_\varepsilon)$ との交わりが空にならないものとし，aH をこの交わりに属する元とする．元 aH の近くでは，座標系 c_1C^* と c_2C^* とは互に解析的な変換によって移り得ることを示す．ξ_i を L_ε の元で $c_i\xi_i H = aH$, $i = 1, 2$, となるものとする．$b_i = c_i\xi_i$ とおく．定理 65 によって，座標系 c_iC^* と b_iC^* とは点 aH の近くで互に解析的な変換によって移り得る．証明の初めに得た結果により，座標系 b_iC^* と aC^* ともまた，点 aH の近くで互に解析的な変換によって移り得る．こうして，Σ が多様

体 G/H の解析的な被覆であることを証明し得た.

次に，我々が多様体 G/H に導入した解析性によって，函数 σ が解析的になることを示す. $x_0 \in G$, $\Xi_0 = aH \in G/H$, また $\Theta_0 = x_0\Xi_0$ とおく. 更に，$x \in G$ 及び $\xi \in L_\varepsilon$ を単位元に十分近い二つの元とする. 元 x_0x の系 x_0D^* (定理 64 の証明参照) における座標は，元 x の系 D^* における座標であり，元 $a\xi H$ の系 aC^* における座標は元 ξ の系 B^* における座標である. 元 $\vartheta \in L_\varepsilon$ を関係

$$x_0a\vartheta H = x_0xa\xi H \tag{18}$$

から定義する. 元 ϑ の系 B^* における座標は元 $x_0a\vartheta H$ の系 $(x_0a)C^*$ における座標となるから，元 ϑ の系 B^* における座標が元 x, ξ の座標の解析函数なることを示せば十分である. 関係(18)から

$$\vartheta H = a^{-1}xa\xi H \tag{19}$$

を得る. 定理 65 により，元 ϑ の座標は元 $a^{-1}xa$ 及び ξ の座標の解析函数である. §43 の命題 D) により，元 $a^{-1}xa$ の座標は元 x の座標の解析函数. こうして函数 σ の解析性が証明される.

多様体 G/H に被覆 Σ を援用して導入した解析性を，**第1の**解析性と呼ぼう. G/H に函数 σ が解析的になるような**第2の**解析性が導入されたものとする. C' を，第 2 の解析性に対応する，原点 H をもつ局所座標系とする. 定理 65 から，座標系 C^* と C' とは H の近くでは互に解析的な変換によって移ることができる. 更に，函数 σ の解析性より，写像 $\Xi \to a\Xi$ が多様体 G/H のそれ自身の上への解析的な同相写像となることに注意する. $\Xi_0 = aH$ を G/H の或る元，A を第 2 の解析性に対応して元 Ξ_0 の近傍に定義された局所座標系とする. 上に座標系 C^* により座標系 aC^* を定義したように，座標系 C' から出発して座標系 aC' を定義しよう. 座標系 C^* と C' との今確立したばかりの関係から，座標系 aC^* と aC' とは点 Ξ_0 の近傍では互に解析的な変換によって移り得る. 写像 $\Xi \to a\Xi$ が第 2 の解析性において解析的な同相写像であることから，点 Ξ_0 の近傍において系 aC' と A とが互に解析的な変換によって移り得ることが出る. こうして，系 aC^* と A とは点 Ξ_0 の近くでは互に解析的な変換によって移り得る. Ξ_0 は G/H の任意の点であるから，以上証明したことにより，多様体 G/H の第

2の解析構造は第1のものと一致する.

かくて定理66は完全に証明された.

例 80. R^{n+1} を $n+1$ 次元の Euclid 空間で，そこには Descartes 座標系が与えられているものとする．方程式 $(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1$ は空間 R^{n+1} において n 次元の球面 S^n を定義する．更に G を，行列式が $+1$ なる，すべての $n+1$ 次の直交行列のなす群とする．各元 $g \in G$ に対して，与えられた座標系によって，空間 R^{n+1} の座標原点の廻りの**回転** g^* を対応させる．対応 $g \to g^*$ により，群 G は，空間 R^{n+1} のエフェクティヴな連続変換群となる．空間 R^{n+1} の部分集合 S^n は，群 G の変換に際してそれ自身に移され，また群 G は，容易に見られるように，S^n の上で推移的である．

次に，多様体 S^n の中に，定理66によって予見される解析性を導入しよう．条件 $x_i>0$ を満たすすべての点 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ より成る S^n における開集合を U_i で表わし，また U_i' によって条件 $x_i<0$ を満たすすべての点のなす開集合を表わすことにする．開集合 $U_1, U_1', \cdots, U_{n+1}, U'_{n+1}$ は多様体 S^n の被覆を構成する．次にこの被覆の開集合の各々に，それを Euclid 空間の開集合の上に写す座標系を導入しよう．開集合 U_i, U_i' を座標平面 $x_i=0$ の上に正射影する，換言すれば，開集合 U_i 或は U_i' の点 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ の座標として，数 $x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^{n+1}$ を取る．そのとき，この開集合 U_i 及び U_i' の正射影が座標平面 $x_i=0$ 上にある球の内部の上に同相に写像されることは，直ちに確かめることができる．こうして作られた被覆 Σ が解析的であり，また変換群 G が S^n に導入された解析構造において解析的となることも，容易に検証される．

被覆 Σ は $2(n+1)$ 箇の開集合を含み，系 Σ の開集合の中どれ一つを欠いても，もはや被覆とはならない．しかし，S^n の中に被覆 Σ が導入したと同じ解析構造を定義する多様体 S^n の解析的な被覆 Σ^* で，しかも唯二つの開集合から成るようなものを構成することはできる．$p=(1, 0, \cdots, 0), p'=(-1, 0, \cdots, 0)$ とおく．開集合 $U=S^n \setminus p$ を点 p から座標平面 $x_1=0$ の上に射影すれば，それの空間 $x_1=0$ の上への同相写像を得る．全く同様に，開集合 $U'=S^n \setminus p'$ を点 p' から同じ平面の上に射影すれば，この開集合から空間 $x_1=0$ の上への同

相写像を得る．二つの開集合 U 及び U' よりなる被覆 Σ^* は，被覆 Σ と同じ類の解析的な被覆である．

第8章　コンパクト群の構造

この章では有限次元コンパクト群の構造と有限次元空間のコンパクトな推移的変換群の構造を研究する．主な結果はコンパクト群とリー群の間の関係についてのものであって，それによるとコンパクト群の単位元の任意の近傍には，ある正規部分群がふくまれ，それによる剰余群がリー群となる(定理 67 参照)．[コンパクト群の] 線型表現に関する定理（第5章定理 33 参照）から直ちに導れかるこの定理 67 から任意の可算箇の基を有するコンパクト群はそれに準同型なリー群の列の極限として表わされることが判る．可算箇の基を有しないコンパクト群の場合には，通常の列の概念ではうまく行かない．この場合には，A. Weil〔46〕の如く，リー群の半順序集合を利用するか，またはコンパクト群の超限列を用いなければならぬ．ここでは後の方法を採用する．コンパクト群に関するこの章の主要結果は，(可算箇の基を有する場合に)任意の局所連結な有限次元コンパクト群はリー群であるという定理として著者〔35〕によって得られたものである（定理 70 参照）．この定理はコンパクトなリー群はコンパクト群に上のような極めて一般的な性格の条件を附加することによって得られることを示している．この定理は特別な場合として，前に Neumann〔30〕によって得られたヒルベルトの第5問題(§ 41 参照)のコンパクト群に対する肯定的な解決を含む．

この章の変換群に関する主要な結果は Montgomery 及び Zippin〔28〕によって得られたものであって，局所連結な有限次元位相空間のコンパクトなエフェクティブ，且つ推移的な変換群はリー群であるという定理である(定理 74 参照)．これから直ちに多様体のコンパクトなエフェクティブ且つ推移的な変換群はリー群であることが導かれる．

この章における結果はすべて，第5章においてコンパクト群に対して述べた線型表現が十分多く存在するという定理が成立つような任意の局所コンパクト

群に対して容易に拡張することができる．ところが，このように都合の良い理論が一般の局所コンパクト群に対しては存在しない．そこに現在の方法による研究の困難さがある．

この章で**リー群**という時は常に**解析的リー群**の意味である．

§46. コンパクト群の収束列

まず第一に，任意のコンパクト群はある意味でいくらでも精密にリー群によって近似できることを述べる定理 67 を証明しよう．次にコンパクト群の超限列である **Lie 列**という概念(定義 42 参照）を導入する．この列に属する群自身はリー群ではないけれども，列に属する各群に対しては，列においてその群より前にある群への準同型写像が存在し，この準同型の核がリー群となるのである．コンパクト群の研究にリー群を用いなければならぬことの必然性がこれだけでも既に示される．超限順序数を添数とする列即ち超限列には，新たに一つの元を追加することにより，また一つの超限列を得ることができる．これによって群の超限列に対し，その**極限**を考える代りに，超限列の**最終項**を考えることができる．これによって極限を考える必要がなくなる．定理 68 はこの最終項という考えに従って述べられている．しかし，ここでは例を作る必要のために，超限列の極限なる概念も導入することにするが，これは例を作る以外には用いない．

注意　次の定理 67 の証明には，線型表現の理論はその一部分だけが用いられるのである．即ちコンパクト群 G の単位元と異る任意の元 a に対して群 G の線型表現 f_a で行列 $f_a(a)$ が単位行列でないようなものが存在するという事実のみを用いるのである．この事実を証明する為には，§§ 28, 29, 30 の知識と，線型表現の定義(§ 32 定義 34 参照)，函数の一様完備系の概念（§ 33, A) 参照)，定理 32 の証明の一部，及び定理 33 の証明を適当に修正したもの，が必要である．この章では定理 32 の証明の中の系 Δ'' の一様完備であることのみを用い，既約表現の概念は用いない．ここで Δ'' は群 G のあらゆる表現の行列要素として現われる函数の全体より成る函数系である．定理 33 の証明の修正は，既約表現の全体の代りにすべての表現の系を考え，函数系 Δ の代りに Δ'' を考えれ

ばよい.

A) G をコンパクト群, $N_1, \cdots, N_k$ をその正規部分群で剰余群 $G/N_i, i=1, \cdots, k$ はリー群であるとする. $N=N_1\frown\cdots\frown N_k$, と置くとき, 剰余群 G/N はまたリー群である.

この命題を $k=2$ の場合に証明する. 任意の有限箇の正規部分群に対して拡張することは容易である. f_i を群 G からリー群 $G/N_i=G_i$, $i=1, 2$ の上への自然準同型写像とする. 群 G_1 と G_2 の直積を G^* で表わそう. G の任意の元 x に対して $f(x)=(f_1(x), f_2(x))\in G^*$ を対応させる. 直ちに知られるように f は群 G から G^* の中への準同型写像であって, その核は $N=N_1\frown N_2$ である. 群 G^* はリー群であり群 G はコンパクトであるから, f は群 G からリー群 $f(G)\subset G^*$ の上への開準同型写像である (定理 62 参照). 従って群 G/N はリー群である.

定理 67. コンパクト群 G の単位元の任意の近傍 U を一つ与えたとき, U に含まれる正規部分群 N が存在して, 剰余群 G/N が(解析的) リー群となる.

証明. 定理 33 により G の単位元と異なる任意の元 a に対して群 G の線型表現 f_a で $f_a(a)$ が単位行列でないようなものが存在する. 写像 f_a は群 G からコンパクトな行列の群の上への準同型写像であり, 従って f_a は群 G から(解析的) リー群 $f_a(G)=G_a$ の上への開準同型写像である (定理 62 及び例 76 参照). 準同型写像 f_a の核を N_a で表わすと, 群 G の単位元と異なる任意の元に対して, a を含まないような正規部分群 N_a で剰余群 G/N_a がリー群であるようなものが構成されたことになる. a は閉集合 N_a に含まれないから a の近傍 V_a が存在して, $N_a\frown V_a$ は空となる. 開集合 V_a, $a\in G\setminus U$, はコンパクトな集合 $G\setminus U$ の開被覆を作る. この開被覆から有限箇の $V_{a_1}, \cdots, V_{a_k}$ を選んで $G\setminus U$ を覆うことができる. $N=N_{a_1}\frown\cdots\frown N_{a_k}$ は勿論 U に含まれ, 命題 A) により G/N は(解析的) リー群である.

定義 42. 或る (超限) 順序数 ϑ より小なるすべての順序数に対応してコンパクト群の超限列 $G_1, G_2, \cdots,$ があり, 二つの順序数 α, β で $\alpha<\beta<\vartheta$ なるものに対して群 G_β から群 G_α の上への準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ が存在するものとする. $\varphi_\alpha{}^\beta$

の核を $K_\beta{}^\alpha$ とする．準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ の与えられたコンパクト群の超限列 $G_1, G_2, \cdots$ は次の二つの条件をみたすとき，**長さ ϑ の収束列**という．

a）$\alpha<\beta<\gamma<\vartheta$ ならば $\varphi_\alpha{}^\beta\varphi_\beta{}^\gamma=\varphi_\alpha{}^\gamma$,

b）δ が ϑ より小なる順序数で直前順序数を有しないとき，すべての正規部分群 $K_\delta{}^\alpha$, $\alpha<\delta$, の交わりは群 G_δ の単位元のみよりなる．

収束列が次の条件をみたすときに **Lie 列**という．

c）群 G_1 及びすべての正規部分群 $K_{\alpha+1}{}^\alpha$, $\alpha+1<\vartheta$, はリー群である．

定理 68. G をコンパクト群とし φ を G からリー群 G_1 の上への準同型写像とする．そのとき，その最初の群が G_1 であり最後の群が G である，長さ $\vartheta+1$ の Lie 列（定義 42 参照）$G_1, G_2, \cdots, G_\vartheta=G$ で $\varphi_1{}^\vartheta=\varphi$ であるようなものが存在する．位相空間 G の位相濃度（定義 14 参照）が τ に等しいならば，ϑ として濃度 τ の最初の順序数をとることができる．従って位相空間 G が可算箇の基を有するならば，ϑ は ω（最初の無限順序数）としてよい．この場合には G_ω より前にある群の超限列 $G_1, G_2, \cdots$ は通常の無限列であり，更にこの列のすべての群はリー群である．

証明. 群 G の単位元の完全近傍系をある超限順序数 ϑ より小なる順序数を添数として $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ とする．$\Gamma_0=G$ としてよい．勿論完全近傍系及びその中における順序を選ぶとき ϑ を濃度 τ の最小の順序数としてよい．定理 67 により各近傍 Γ_α は群 G の正規部分群 N_α で剰余群 G/N_α がリー群であるようなものを含む．特に N_0 としては準同型写像 φ の核をとることができる．$1\leqq\beta<\vartheta$ なる β に対して，すべての正規部分群 N_α, $\alpha<\beta$, の交わりを $K_\vartheta{}^\beta$ で表わし，$G_\beta=G/K_\vartheta{}^\beta$, $G_\vartheta=G$ とする（$\vartheta=\omega$ なる場合には A）によりすべての群 G_β, $\beta<\omega$, はリー群である）．群 G_ϑ から G_β の上への自然準同型写像を $\varphi_\beta{}^\vartheta$ とする．$\beta<\gamma<\vartheta$ ならば $K_\vartheta{}^\gamma\subset K_\vartheta{}^\beta$ であるから，群 G_γ から G_β の上への準同型写像 $\varphi_\beta{}^\gamma$ で

$$\varphi_\beta{}^\gamma\varphi_\gamma{}^\vartheta=\varphi_\beta{}^\vartheta \qquad (1)$$

という条件をみたすものが唯一つ存在する．準同型写像 $\varphi_\beta{}^\gamma$ の核 $K_\vartheta{}^\beta/K_\vartheta{}^\gamma$ を $K_\gamma{}^\beta$ と記す．関係式（1）の両辺に準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ を作用させれば，$\varphi_\alpha{}^\beta\varphi_\beta{}^\gamma\varphi_\gamma{}^\vartheta=\varphi_\alpha{}^\beta\varphi_\beta{}^\vartheta=\varphi_\alpha{}^\vartheta$ が得られ，$\varphi_\alpha{}^\gamma\varphi_\gamma{}^\vartheta=\varphi_\alpha{}^\vartheta$ であるから $\varphi_\alpha{}^\beta\varphi_\beta{}^\gamma=\varphi_\alpha{}^\gamma$, $\alpha<\beta$

$<\gamma<\vartheta$, となる．従って((1)参照)，準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$, $\alpha<\beta<\vartheta+1$ は定義42の条件a)をみたす．定義42のb)もみたされることを証明しよう．実際，順序数 $\gamma<\vartheta$ が直前順序数を有しないならば，正規部分群 $K_\vartheta{}^\gamma$ はすべての正規部分群 $K_\vartheta{}^\beta, \beta<\gamma$, の交わりである．これからすべての正規部分群 $K_\gamma{}^\beta=K_\vartheta{}^\beta/K_\vartheta{}^\gamma$, $\beta<\gamma$ の交わりは群 G_γ の単位元のみより成る．すべての正規部分群 $K_\vartheta{}^\alpha, \alpha<\vartheta$ もまた単位元のみより成る．なぜならば，それは近傍 Γ_0, Γ_1, Γ_2, … の交わりに含まれるからである．従って，列 $G_1, G_2, \cdots, G_\vartheta$ は準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ によって収束列となる．

G_1 はリー群であるから，定義42の条件c) を証明する為には，核 $K_{\alpha+1}{}^\alpha$ がリー群であることを証明すればよい．$K_\vartheta{}^{\alpha+1}=K_\vartheta{}^\alpha\cap N_\alpha$ であるから，群 G_ϑ からリー群 G_ϑ/N_α の上への自然準同型写像によって，部分群 $K_\vartheta{}^\alpha$ は群 $K_\vartheta{}^\alpha/K_\vartheta{}^{\alpha+1}$ に同型な部分群に写像される．従って群 $K_{\alpha+1}{}^\alpha$ はリー群 G_ϑ/N_α の部分群に同型であり，従ってまたそれ自身リー群である．

このように $G_1, G_2, \cdots, G_\vartheta$ はリー列である．これで定理が証明された．

次の定義43は，例を作る為にのみ用いられる．また命題B) 及びC) は後では全く用いられないが，完全を期す為にここに掲げて置く．

定義 43.　準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ を有する列 $G_1, G_2, \cdots$, が長さ ϑ の収束列とする．ϑ より小なるすべての超限順序数を添数とする元の超限列 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ は $x_\alpha \in G_\alpha$, $\alpha<\vartheta$, で且つ，$\varphi_\alpha{}^\beta x_\beta=x_\alpha$ であるとき，**基本列**という．すべての基本列の作る集合を G で表わす．集合 G の二つの元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$, $y=(y_1, y_2, \cdots)$ の積 $z=xy$ は $z=(z_1, z_2, \cdots)$, 但し $z_\alpha=x_\alpha y_\alpha$, $\alpha<\vartheta$, によって定義する．容易に判るように $z\in G$ である．このように定義した積の法則により G は群となる．群G に位相を導入しよう．一つの $\alpha<\vartheta$ に対して U_α を群 G_α の任意の一つの近傍とし，群 G の元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ であって，$x_\alpha\in U_\alpha$ なる条件をみたすものの全体を $[U_\alpha]$ とする．$[U_\alpha]$, $\alpha<\vartheta$, の型の集合の全体を G における完全近傍系 (定義14参照) とする．このようにして集合 G に導入された代数的及び位相的構造により，G はコンパクトな位相群となることが証明される．群 G を準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ を有する収束列 $G_1, G_2, \cdots$ の**極限**という．

集合 G が群であることを証明しよう．G における積が結合律をみたすことは，群 G_α, $\alpha<\vartheta$, における積が結合律をみたすことから導かれる．群 G の単位元は基本列 $(e_1, e_2, \cdots)$ である．但しここで e_α は G_α の単位元である．元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ の逆元は $x^{-1}=(x_1{}^{-1}, x_2{}^{-1}, \cdots)$ である．

G が位相空間であることを証明しよう．先ず第一に U_α が位相空間 G_α における任意の一つの近傍とし，U_β を準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ によるその完全原像とするとき，

$$[U_\alpha]=[U_\beta] \tag{2}$$

であることを注意しよう．今，$a=(a_1, a_2, \cdots)$ 及び $b=(b_1, b_2, \cdots)$ を G の相異なる二つの元とする．$a\neq b$ であるから，ある順序数 $\alpha<\vartheta$ が存在して $a_\alpha\neq b_\alpha$ となる．故に位相空間 G_α における一点 a_α の近傍 U_α で元 b_α を含まないものが存在する．位相空間 G における一点 a の近傍 $[U_\alpha]$ は点 b を含まない．更に，$[U_\alpha]$ 及び $[V_\beta]$, $\alpha\leqq\beta$, を元 $a=(a_1, a_2, \cdots)$ の二つの近傍とする．もしも，$\alpha<\beta$ ならば，G_β における近傍 U_β で $[U_\alpha]=[U_\beta]$ なるものが存在する((2)参照)．G_β における点 a_β の二つの近傍 U_β 及び V_β の交わりは a_β の一つの近傍 W_β を含む．このとき勿論，$[W_\beta]\subset[U_\alpha]\cap[V_\beta]$ が成立つ．従って G は位相空間である(定理3参照)．

次に G が位相群であることを証明しよう．$a=(a_1, a_2, \cdots)$, $b=(b_1, b_2, \cdots)$ を G の二つの元とする．このとき，$ab^{-1}=c=(c_1, c_2, \cdots)$ とすれば $c_\alpha=a_\alpha b_\alpha{}^{-1}$ である．今，元 c の任意の近傍を $[W_\gamma]$ とする．W_γ は G_γ における点 $c_\gamma=a_\gamma b_\gamma{}^{-1}$ の近傍であるから，G_γ における点 a_γ 及び b_γ の近傍 U_γ 及び V_γ で $U_\gamma V_\gamma{}^{-1}\subset W_\gamma$ となるものが存在する．このとき勿論，$[U_\gamma][V_\gamma]^{-1}\subset[W_\gamma]$ が成立つ．従って群 G における演算が連続であることが証明されたから，G は位相群である．

最後に G がコンパクトであることを証明しよう．その為に $\alpha<\vartheta$ なるすべての α に対するコンパクト群 G_α の直積 G^* (定義29参照)を作る．G^* の元 u^* は ϑ より小なるすべての順序数を添数とする元の超限列 $(u_1, u_2, \cdots)$ であって，$u_\alpha\in G_\alpha$, $\alpha<\vartheta$, なる条件をみたすものである．このような列の内，条件 $\varphi_\alpha{}^\beta u_\beta=u_\alpha$, $\alpha<\beta<\vartheta$, をみたすものが基本列である．一つ一つの条件 $\varphi_\alpha{}^\beta u_\beta=u_\alpha$ をみた

す集合は G^* の閉集合を作るから，すべての基本列の全体 G は G^* のコンパクトな部分集合である．そこで G がコンパクト空間であることを証明するには，定義43によって G に与えられた位相が，G^* から誘導される位相と一致することを証明すればよい．U_{α_i} を G_{α_i} における近傍とする，$i=1,\cdots,k$. G^* の元 $u^*=(u_1,u_2,\cdots)$ であって，条件 $u_{\alpha_i}\in U_{\alpha_i}, i=1,\cdots,k,$ をみたす点の全体が作る G^* の近傍を U^* とする．今 $a=(a_1,a_2,\cdots)\in U^*\frown G$ とし，点 a の G における近傍 $[V_a]$ で $[V_a]\subset U^*$ となるものが存在することを証明しよう．α を順序数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,$ の内最大なるものとする．更に $U_\alpha{}^i$ を G_α における近傍で $[U_{\alpha_i}]=[U_\alpha{}^i]$ ((2)参照) となるものとする．各近傍 $U_\alpha{}^i, i=1,\cdots,k,$ は元 a_α を含み，従って，G_α における元 a_α の近傍 V_α で交わり $U_\alpha{}^1\frown\cdots\frown U_\alpha{}^k$ に含まれるものが存在する．容易に知られるように $a\in[V_\alpha]\subset U^*$ である．次に $[W_\alpha]$ を位相空間 G における点 $a=(a_1,a_2,\cdots)$ の与えられた近傍とする．G^* における近傍 W^* を条件 $u_\alpha\in W_\alpha$ をみたす元 $u^*=(u_1,u_2,\cdots)$ の全体として定義する．勿論，$[W_\alpha]=W^*\frown G$ である．このようにして上に述べた G の二つの位相は一致し，従って位相空間 G はコンパクトであることが証明された．

B)　今，$G_1,G_2,\cdots$ が準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ により長さ ϑ の収束列を作るとし，G はその極限とする．$G_\vartheta=G$ とし G_ϑ の各元 $x_\vartheta=(x_1,x_2,\cdots,x_\alpha,\cdots)$ に対して元 $x_\alpha\in G_\alpha, \alpha<\vartheta,$ を対応させることにより，群 G_ϑ から G_α の中への写像 $\varphi_\alpha{}^\vartheta$ が定義される：即ち $\varphi_\alpha{}^\vartheta(x_\vartheta)=x_\alpha$ である．この $\varphi_\alpha{}^\vartheta$ は位相群 G_ϑ から位相群 G_α の上への準同型写像であり，$G_1,G_2,\cdots,G_\vartheta$ は準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ により長さ $\vartheta+1$ の収束列を作る．

$\varphi_\alpha{}^\vartheta$ が位相群 G_ϑ から G_α の中への準同型写像であることと，$\varphi_\alpha{}^\beta\varphi_\beta{}^\gamma=\varphi_\alpha{}^\gamma$, $\alpha<\beta<\gamma<\vartheta+1$, という条件がみたされることは直ちに証明される．すべての正規部分群 $K_\vartheta{}^\alpha, \alpha<\vartheta,$ の交わりは，群 G_ϑ の単位元 e_ϑ のみから成ることを証明しよう．今，すべての $\alpha<\vartheta$ に対し $x_\vartheta\in K_\vartheta{}^\alpha$ と仮定すれば，$\varphi_\alpha{}^\vartheta(x^\vartheta)=e_\alpha$, 即ち，$x_\vartheta=(e_1,e_2,\cdots)=e_\vartheta$ である．あとは，$\varphi_\alpha{}^\vartheta$ が群 G_ϑ から群 G_α の上への写像であることを証明すればよい．x_α を群 G_α の任意の一つの元とし，$\beta<\alpha$ に対して，$x_\beta=\varphi_\beta{}^\alpha(x_\alpha)$ と置く．次に，$\alpha<\beta<\vartheta$ なる β に対する x_β を定義

しよう．いま，$x_1, x_2, \cdots, x_\alpha, \cdots$ が既に β より小なるすべての順序数に対しては定義されているものとする．このとき x_β を次のように定義する．β が直前順序数 $\beta-1$ を有するときは，x_β としては条件 $\varphi_{\beta-1}{}^{\beta}(x_\beta)=x_{\beta-1}$ をみたす群 G_β の任意の元 x_β をとる．このような元は，$\varphi_{\beta-1}{}^{\beta}(G_\beta)=G_{\beta-1}$ であるから，必ず存在する．β が直前順序数を有しないときは，元 $x_\gamma, \gamma<\beta$, の $\varphi_\gamma{}^\beta$ による完全原像を $X_\beta{}^\gamma$ とする．集合 $X_\beta{}^1, X_\beta{}^2, \cdots$ はコンパクトな集合の非増大列だから，それらの交わりは空でない．そこで x_β としてこの交わりに属する任意の元をとる．このようにして構成された超限列 $x_\vartheta=(x_1, x_2, \cdots, x_\alpha, \cdots)$ は基本列であって，条件 $\varphi_\alpha{}^\vartheta(x_\vartheta)=x_\alpha$ をみたす．従って $\varphi_\alpha{}^\vartheta$ は群 G_α の上への写像である．

次の命題 C) により定理 68 は，任意のコンパクト群は Lie 列の極限になるという事実を証明していることになる．

C) $G_1, G_2, \cdots, G_\vartheta$ が準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ により長さ $\vartheta+1$ の収束列となるものとし，順序数 ϑ は直前順序数を有しないものとする．更に準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ による，この収束列から最後の項を除いた長さ ϑ の収束列 $G_1, G_2, \cdots$ の極限を G とする．$x_\vartheta \in G_\vartheta$ に対して，$x_\alpha=\varphi_\alpha{}^\vartheta(x_\vartheta), \alpha<\vartheta$ とおく．このとき $x=(x_1, x_2, \cdots)\in G$ である．このようにして群 x_ϑ から群 G の中への写像 $x_\vartheta\to x$ が得られる．これを φ^ϑ で表わそう．φ^ϑ は位相群 G_ϑ から位相群 G の上への同型写像である．

直ちに証明されるように φ^ϑ は位相群 G_ϑ から位相群 G の中への準同型写像である．この準同型写像 φ^ϑ の核が群 G_ϑ の単位元だけから出来ていることは定義 42 の条件 b) から導かれる．最後に $x=(x_1, x_2, \cdots)\in G$ とするとき，$X_\vartheta{}^\alpha$ を写像 $\varphi_\alpha{}^\vartheta$ による元 x_α の完全原像とする．集合列，$X_\vartheta{}^1, X_\vartheta{}^2, \cdots$ はコンパクト集合の非増大列である．今すべての $X_\vartheta{}^\alpha, \alpha<\vartheta$, の交わりに属する元 x_ϑ をとれば，$\varphi^\vartheta(x_\vartheta)=x$ となる．

例 81. $G_1, G_2, \cdots$ をコンパクト群の通常の［即ち超限順序数でなく，自然数を添数とする］無限列とし，φ_i を群 G_{i+1} から G_i の上への準同型写像とする．今 $i<j$ を二つの自然数とするとき $\varphi_i{}^j=\varphi_i\varphi_{i+1}\cdots\varphi_{j-1}$ とおく．明らかに列 $G_1, G_2, \cdots$ は準同型写像 $\varphi_i{}^j$ により長さ ω の収束列となり，従ってこの列の極限群 G が定まる．このとき準同型写像 $\varphi_i{}^j$ を有する群の列 $G_1, G_2, \cdots$ は G に**収束**すると

いう．命題 B) により群 G を列 $G_1, G_2, \cdots$ に添加した列 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega = G$ が準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta, \alpha < \beta \leqq \omega$, により長さ $\omega+1$ の収束列となる．群 $G_1, G_2, \cdots$ がすべて可算基を有するときは，群 G もまた可算箇の基を有することが，定義 43 から直ちに知られる．定理 68 と命題 C) に依り可算基を有する任意のコンパクト群 G はリー群の列 $G_1, G_2, \cdots$ の準同型写像 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ による極限となる．

次に群 $G_1, G_2, \cdots$ がすべて有限群のときを考える．この場合には極限群 $G = G_\omega$ は 0 次元であることを証明しよう．写像 $\varphi_\alpha{}^\omega$ は G_ω から有限群の上への準同型写像故，その核 $K_\omega{}^\alpha$ は G_ω の開集合である．またすべての核 $K_\omega{}^\alpha, \alpha < \omega$, の交わりは G_ω の単位元だけから出来ているから，群 G_ω における単位元の任意の近傍 U に対して，十分大なる自然数 α をとれば常に $K_\omega{}^\alpha \subset U$ となる．このことから G_ω が 0 次元であることは直ちに知られる（§22, E) 及び §16, F) 参照)．容易に証明されるように空間 G_ω は有限集合であるか，Cantor の完全集合[1]と同相である．定理 68 の証明から直ちに知られるように，可算基を持つ任意の 0 次元コンパクト群は有限群のある列の極限である．

次に D をすべての実数の作る加法位相群とし，すべての整数から成る D の部分群を N とし，$K = D/N$ とする．$G_i = K, i = 1,2, \cdots$, とし群 G_{i+1} から群 G_i の上への準同型写像 φ_i を $\varphi_i(x) = s_i x$ で定義する．但しここで s_i はある自然数である．容易に判るように極限群 G_ω から群 G_1 の上への準同型写像 $\varphi_1{}^\omega$ の核 $K_\omega{}^1$ は群の列 $K_2{}^1, K_3{}^1, \cdots$ の準同型写像 $\varphi_2, \varphi_3, \cdots$ による極限である．$K_i{}^1$ は有限群だから（その位数は $s_1 s_2 \cdots s_{i-1}$ である)，群 $K_\omega{}^1$ は 0 次元である．L を群 G_1 の単位元の連結な近傍で G_1 全体とは一致しないものとする．容易に判るように L は一つの区間である．準同型写像 $\varphi_1{}^\omega$ による区間 L の群 G_ω における完全原像は区間 L と空間 $K_\omega{}^1$ との直積と同相である．後に定理 69 で証明されるようにこのような G_ω の構造は一般の有限次元コンパクト群に対しても常に成立つ．

§47.　有限次元コンパクト群

この§では有限次元コンパクト群の構造を研究する．即ち，有限次元のコン

訳註 1)　本書 138 頁及び第 3 章の補註(巻末)を見よ．

パクト群は局所的には，リー群芽と 0 次元の群との直積となることを証明する(定理 69 参照)．この定理から，有限次元のコンパクト群は局所連結であればリー群となることが直ちに導かれる．有限次元コンパクト群を研究する最も本質的な方法として次の補助定理 2 が用いられる．この補助定理は φ をコンパクト群 G からリー群 G^* の上への準同型写像とし，g^* を群 G^* の一つの 1 径数部分群とするとき，G に 1 径数部分群 g が存在して，条件 $\varphi(g(t)) = g^*(t)$，をみたすことを保証するものである．Lie 列の概念と定理 68 はこの補助定理 2 を証明する為にのみ用いられ，それ以後は使われない．

この§及び次の§48 において $\dim R$ はコンパクト空間 R の次元を表わす．

A)　L 及び M を二つのリー群芽とし，χ を M から L の上への局所準同型写像とし，g を L の 1 径数部分群とする．このとき，Mの 1 径数部分群 h とある正数 ε が存在し，$|t| < \varepsilon$ なるとき $g(t) = \chi(h(t))$ となる．

この命題を証明する為に，リー群芽 L 及び M に第 1 種の標準座標を導入しよう．定理 63 によってこの座標では χ は次の形に書ける．

$$x^i = \sum_{j=1}^{r} q^i{}_j y^j,\ i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

ここで，行列 $\|q^i{}_j\|$ の階数は n であるから，1 径数部分群 g の接ベクトルのこの座標系における成分を $a^1, \cdots, a^n$ とするとき，未知数 $b^1, \cdots, b^r$ に関する連立 1 次方程式 $a^i = \sum_{j=1}^{r} q^i{}_j b^j, i = 1, \cdots, n,$ は解を有する．関係式(1)によって，接ベクトルが $b = (b^1, \cdots, b^r)$ であるような M の 1 径数部分群 h は，条件 $g(t) = \chi(h(t))$ をみたす．

補助定理 1.　G 及び H を二つのコンパクト群，φ を群 H から G の上への準同型写像とし，φ の核 K はリー群であると仮定する．この時 $|t| < \delta$ で定義された群 G の 1 径数部分群 g に対して，$|t| < \delta$ で定義された群 H の 1 径数部分群 h が存在して条件 $g(t) = \varphi(h(t))$，$|t| < \delta$，をみたす．

証明.　L を $|t| < \delta$ なる t に対する元 $g(t)$ の集合とする．勿論 L はリー群芽で，その二つの元に対しては乗法の規則が G における乗法によって定義されている．従って集合 $M = \varphi^{-1}(L)$ は H における乗法によって群芽となる．次に

このMがリー群芽であることを証明する．しかし，その前にこれが証明されたならば，補助定理にいうような1径数部分群が存在することを証明して置こう．命題A)によって正数εとリー群芽Mの1径数部分群芽hが存在して$g(t)=\varphi(h(t))$, $|t|<\varepsilon$, をみたす．hは群Hの1径数部分群芽であるから径数tのすべての値に対して一意的に定義を拡張できる．このように拡張して得られた1径数部分群hは$g(t)=\varphi(h(t))$, $|t|<\delta$, をみたす．

Mがリー群芽なることを証明しよう．いまPを任意のリー群芽とし，DをPの一つの第1種標準座標系で，群芽Pの単位元の星狀近傍W'において定義されているものとする．Pにおける単位元の近傍Wを，その閉苞がコンパクトであり，且つその中に含まれる任意の二つの元の積が定義されていてW'に含まれるように選ぶ．直ちに知られるようにxが単位元と異なるWの元ならば，その適当な巾(べキ)は，定義されてはいるが，Wには属しない．このような性質を有するリー群芽Pの単位元の近傍Wを簡単のために，**十分小さい**近傍と呼ぶ．Uを群Gの単位元の近傍でリー群芽Lの単位元の近傍$U\frown L$が十分小さいものとする．更に，Vを群Hの単位元の近傍で，$\varphi(V)\subset U$であり，且つ，リー群Kの単位元の近傍$K\frown V$が十分小なるものとする．定理67によって群Hの正規部分群NでVに含まれ，H/Nがリー群であるようなものが存在する．$N\frown M$は群Hの単位元のみから成ることを証明しよう．$\varphi(N\frown M)\subset U\frown L$であって，しかも$U\frown L$は十分小なる近傍であるから，集合$\varphi(N\frown M)$は単位元のみより成る．従って，$N\frown M\subset K$であるから，$N\frown M\subset V\frown K$である．リー群$K$の単位元近傍$V\frown K$は十分小であるから$N\frown M$は単位元のみより成る．そこで群$H$からリー群$H/N$の上への自然準同型写像により群芽$M$はリー群$H/N$の部分群芽の上へ同型に写像される．従って$M$自身がまたリー群芽である（定理62参照）．

これで補助定理1は証明された．

補助定理2.　Gをコンパクト群，φをGからリー群G^*の上への準同型写像とし，g^*をG^*の1径数部分群で$|t|<\delta$で定義されているものとする．このとき群Gの1径数部分群gが$|t|<\delta$に対して定義され，$\varphi(g(t))=g^*(t)$, $|t|<\delta$, が成立つ．

証明. 定理 68 に依り，準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\beta$ によるリー列 $G_1 = G^*, G_2, \cdots, G_\vartheta = G$ で $\varphi_1{}^\vartheta = \varphi$ となるものが存在する．$g_1 = g^*$ とおき，今 $\gamma \leqq \vartheta$ より小なる順序数 α に対しては既に $|t| < \delta$ で定義された群 G_α の 1 径数部分群 g_α が $\alpha < \beta < \gamma$ なるとき $\varphi_\alpha{}^\beta(g_\beta(t)) = g_\alpha(t)$, $|t| < \delta$, をみたすように構成されたと仮定する．γ が直前順序数 $\gamma - 1$ を有するときは，補助定理 1 に依り群 G_γ の 1 径数部分群 g_γ で $\varphi_{\gamma-1}{}^\gamma(g_\gamma(t)) = g_{\gamma-1}(t)$, $|t| < \delta$, をみたすものが存在する．このとき任意の $\alpha < \beta \leqq \gamma$ に対して $\varphi_\alpha{}^\beta(g_\beta(t)) = g_\alpha(t)$, $|t| < \delta$, が成立つ．γ が直前順序数を有しないときは元 $g_\alpha(t) \in G_\alpha$ の準同型写像 $\varphi_\alpha{}^\gamma$ による完全原像を $X_\gamma{}^\alpha(t)$ とする．集合 $X_\gamma{}^1(t), X_\gamma{}^2(t), \cdots$ はコンパクト集合の非増大超限列である．これらの集合の交わりは唯一点のみより成る．何となれば正規部分群 $K_\gamma{}^\alpha$, $\alpha < \gamma$, の交わりは単位元だけから出来ているからである．この元を $g_\gamma(t)$ とする．$\alpha < \beta \leqq \gamma$ なるとき勿論 $\varphi_\alpha{}^\beta(g_\beta(t)) = g_\alpha(t)$, $|t| < \delta$, が成立つ．g_γ は $|t| < \delta$ で定義された群 G_γ の 1 径数部分群であることを証明しよう．t_1, t_2 を $|t_1| < \delta$, $|t_2| < \delta$, $|t_1 + t_2| < \delta$ をみたす二つの実数とするとき，$\varphi_\alpha{}^\gamma(g_\gamma(t_1)g_\gamma(t_2)) = g_\alpha(t_1)g_\alpha(t_2) = g_\alpha(t_1 + t_2)$ であるから，任意の $\alpha < \gamma$ に対して $g_\gamma(t_1)g_\gamma(t_2) \in X_\gamma{}^\alpha(t_1 + t_2)$ となる．従って $g_\gamma(t_1)g_\gamma(t_2) = g_\gamma(t_1 + t_2)$ である．次に G_γ における単位元の一つの近傍 U_γ が与えられたとしよう．今 G_γ の単位元近傍 V_γ を $V_\gamma{}^2 \subset U_\gamma$ である如くとり，$V_\alpha = \varphi_\alpha{}^\gamma(V_\gamma)$, $\alpha < \gamma$, とする．正規部分群 $K_\gamma{}^\alpha$, $\alpha < \gamma$, の交わりは G_γ の単位元だけから出来ているから，$K_\gamma{}^\beta \subset V_\gamma$ となる $\beta < \gamma$ が存在する．$\varphi_\beta{}^\gamma(V_\gamma) = V_\beta$ であるから，これに依って近傍 V_β の準同型写像 $\varphi_\beta{}^\gamma$ に依る完全原像 W_γ は U_γ に含まれる．今正数 ε を十分小にとり，$|t| < \varepsilon$ なるときに $g_\beta(t) \in V_\beta$ となるようにすれば，$g_\gamma(t) \in W_\gamma \subset U_\gamma$, $|t| < \varepsilon$, となる．従って g_γ は群 G_γ の 1 径数部分群である．

以上の結果により，超限帰納法を使って群 G_ϑ の 1 径数部分群 $g_\vartheta = g$ で条件 $\varphi_1{}^\vartheta(g_\vartheta(t)) = g_1(t)$, $|t| < \delta$, をみたすものが存在することが言えたわけである．

これで補助定理 2 は証明された．

次の命題 B) はこの § では部分群 H が単位元のみより成る場合の外は用いない．一般の場合は，次の § で推移的変換群を研究する際用いられる．

B)　G をコンパクト群とし，H をその部分群，$\Gamma = G/H$ を左剰余類の作る空間とし，$r = \dim \Gamma$ を Γ の次元とする（$r = \infty$ なる場合も含む）．また s を $r \geqq s \geqq 0$ なる整数とする．このとき群 G の単位元 e の一つの近傍 U が存在して，U に含まれる G の任意の正規部分群 N に対して左剰余類の集合 $\Gamma^* = G/NH$ は次元が s より小でない．特に次元 r が有限なるときは s を r に等しくとれる．このときは $\dim \Gamma^* \geqq \dim \Gamma$ が成立つ．

これを証明しよう．N を群 G の任意の正規部分群とし $\Gamma^* = G/NH$ を左剰余類の空間とする．Γ の各元 X に Γ^* の元 $X^* = NX$ を対応させることにより得られる，位相空間 Γ から位相空間 Γ^* の上への連続写像を $X^* = f(X)$ で表わすことにする．§16, E) に依り空間 Γ の有限開被覆 $\Omega' = \{W_1', \cdots, W_k'\}$ が存在して Γ^* の上への写像 f で Ω' に属する（§16, E) 参照）ものが存在すれば，空間 Γ^* の次元は s より小ではない．そこで群 G の単位元の近傍 U を適当にとれば，$N \subset U$ なる正規部分群 N に対して上に定義した写像 f は被覆 Ω' に属することを証明しよう．群 G から空間 G/H の上への自然写像を g とし，$W_j = g^{-1}(W'_j)$ とする．このとき $W_1, \cdots, W_k$ は空間 G の開被覆を作る．$x \in G$ に対し $x \in W_j$ となったとき，G の単位元の近傍 V_x を $xV_x^2 \subset W_j$ となるようにとる．xV_x, $x \in G$, なる近傍の全体は空間 G の開被覆を作る．この被覆の中から有限箇の開集合，$x_1V_{x_1}, \cdots, x_hV_{x_h}$ を選んで G の被覆とすることができる．このとき $V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_h} = U$ とする．$N \subset U$ なる正規部分群 N に対しては写像 f が被覆 Ω' に属することを証明しよう．$A^* = aNH, a \in G$, を空間 Γ^* の任意の一つの元とする．集合 $f^{-1}(A^*)$ は $anH, n \in N$, という形の左剰余類の全体から成る．いま $a \in x_iV_{x_i}$ なる i が存在し，更にこの i に対し $x_iV_{x_i}^2 \subset W_j$ なる j が存在する．これらの i, j に対して $anH \subset x_iV_{x_i}NH \subset x_iV_{x_i}^2H \subset W_jH \subset W_j'$ となるから，$anH \in W_j'$，即ち $f^{-1}(A^*) \subset W_j'$ となり写像 f は被覆 Ω' に属する．従って B) が証明された．

定理 69.　有限次元（$\dim G = r$）のコンパクト群 G は局所的に r 次元のリー群芽 L と 0 次元の正規部分群 N との直積に分解される．更に詳しくいえば r 次元の開立方体と同相な G の部分集合 L と 0 次元の正規部分群 N が存在して次の条件をみたす．a)　L の各元 l は N の各元 n と可換である．b)　集合

$V=LN$ は G の単位元の近傍である．c)　V の各元 v は一意的に $v=ln$ と書表わされる．但しここで $l\in L$, $n\in N$ で l 及び n はv の連続な函数である．d)　l_1 及び l_2 が L の二つの元で $l_1l_2\in V$ となるものとすれば $l_1l_2\in L$ となり，L は G に於ける乗法によって群芽となる．e)　群芽 L はリー群芽である．これらのことから G/N がリー群であることが直ちに知られる．N としては G/N がリー群となるような任意の 0 次元の正規部分群をとることができる．

証明．φ を群 G からリー群 G^* の上への準同型写像とし，s を群 G^* の次元とする．G^* の[その接ベクトルが] 1 次独立な 1 径数部分群を s 個とり $g_1^*, \cdots, g_s^*$ とし，十分小なる正数 δ を $|t^i|<\delta, i=1, \cdots, s$ なるとき $t^1, t^2, \cdots, t^s$ が点 $g_1^*(t^1)g_2^*(t^2)\cdots g_s^*(t^s)$ の座標であるように選ぶ (§43, A) 参照)．$|t^i|<\delta, i=1, \cdots, s$, をみたす t^i によって上のように書表わされる点の集合を L_δ^* で表わす．このとき L_δ^* は s 次元の開いた立方体と同相である．このとき補助定理 2 によって，群 G には $|t|<\delta$ で定義された 1 径数部分群 g_i で条件 $\varphi(g_i(t))=g_i^*(t)$, $|t|<\delta$, をみたすものが存在する．$g_1(t^1)g_2(t^2)\cdots g_s(t^s)$, $|t^i|<\delta, i=1, \cdots, s$, と表わせる g の点の全体を L_δ で表わす．G^* の点 $x^*=g_1^*(t^1)g_2^*(t^2)\cdots g_s^*(t^s)\in L_\delta^*$ に対して G の点 $f(x^*)=x=g_1(t^1)g_2(t^2)\cdots g_s(t^s)\in L_\delta$ を対応させる．集合 L_δ^* から L_δ の上への写像 f は明らかに連続であり，また $\varphi(f(x^*))=x^*$ で，写像 φ もまた連続であるから，二つの写像 f 及び φ は集合 L_δ^* と L_δ の間の互に逆な同相写像を与える．従って G には s 次元の開いた立方体と同相な集合 L_δ が含まれる．このことから特に，$r\geqq s$ である．これによって，φ がコンパクト群 G からリー群の上への準同型写像であるときは，

$$\dim(\varphi(G))\leqq\dim(G) \tag{2}$$

であることが証明された．

準同型写像 φ の核を N で表わそう．群 G の単位元の近傍 U を，G の正規部分群 K で U に含まれるものがすべて

$$\dim(G/K)\geqq\dim(G) \tag{3}$$

をみたし，同時に群 N の正規部分群 N_1 で $N\cap U$ に含まれるものがすべて

$$\dim(N/N_1)\geqq\dim(N) \tag{4}$$

をみたすように選ぶ．かかる U が存在することは，命題B) によって知られる．次に U に含まれる G の正規部分群 K を G/K がリー群となるように選ぶ(定理67参照)．$N_1 = N \frown K$ とすれば，G/N_1 及び N/N_1 はまたリー群である(§46, A)参照)．群 G から群 G/N_1 の上への自然準同型写像を φ_1 で表わす．(3)及び(4)式は

$$\dim(\varphi_1(G)) \geqq \dim(G), \tag{5}$$

$$\dim(\varphi_1(N)) \geqq \dim(N) \tag{6}$$

と書表わされる．$\varphi_1(G)$ 及び $\varphi_1(N)$ はリー群であるから，(2)と，(5)，(6)式を比較して

$$\dim(\varphi_1(G)) = \dim(G), \tag{7}$$

$$\dim(\varphi_1(N)) = \dim(N) \tag{8}$$

という関係が得られる．$\varphi_1(G)$ はリー群で $\varphi(G) = \varphi_1(G)/\varphi_1(N)$ であるから，定理63により

$$\dim(\varphi_1(G)) = \dim(\varphi(G)) + \dim(\varphi_1(N)) \tag{9}$$

となる．関係(7)，(8)，(9)により

$$\dim(G) = \dim(\varphi(G)) + \dim(N) \tag{10}$$

が得られた．ここで N は準同型写像 φ の核であり，(10)式は有限次元コンパクト群からリー群の上への任意の準同型写像に対して成立つ．そこで(10)式を準同型写像 φ_1 に対して適用すれば

$$\dim(G) = \dim(\varphi_1(G)) + \dim(N_1) \tag{11}$$

が得られるから，(7)と比較して $\dim(N_1) = 0$ であることが判った．従って群 G は0次元の正規部分群 N_1 で剰余群 G/N_1 がリー群となるものを含む．

$V_\delta = \varphi^{-1}(L_\delta^*)$ とおく．$v \in V_\delta$ とし，$l = f(\varphi(v))$ とすれば，$l \in L_\delta$ である．$\varphi(l) = \varphi(v)$ であるから l と v は G の部分群 N による同一の剰余類に含まれ，従って $v = ln, n \in N$, とかける．v のこのような分解は一意的である．それは $v = ln$, $l \in L_\delta, n \in N$ ならば，$l = f(\varphi(v))$ により l が一意的に v によって定まるからである．$0<\gamma<\delta$ なる γ に対して $|t^i|<\gamma$, $i = 1, \cdots, s$, に対する $x^* = g_1^*(t^1)\cdots g_s^*(t^s) \in L_\delta^*$ の全体を L_γ^* とし，$f(L_\gamma^*) = L_\gamma$, $\varphi^{-1}(L_\gamma^*) = V_\gamma$ とおく．このと

き，$\bar{V}_\gamma = \varphi^{-1}(\bar{L}_\gamma{}^*)$ である．直積空間 $\bar{L}_\gamma \times N$ の点 (l, n) に点 $ln \in \bar{L}_\gamma N$ を対応させる．この写像は連続で1対1であり，且つ $\bar{L}_\gamma \times N$ はコンパクト空間であるから，写像 $(l, n) \to ln$ は $\gamma < \delta$ なるとき $\bar{L}_\gamma \times N \to \bar{L}_\gamma N$ の位相写像を与える．このことから $v = ln$ なる関係によって，元 $l \in L_\delta$ と $n \in N$ が $v \in V_\delta$ の連続函数として定まることが判った．

次に $\dim(N) = 0$ と仮定しよう（G の0次元正規部分群 N で G/N がリー群となるものが存在することは前に証明した）．$\dim(N) = 0$ であるから $s = r$ である（(10) 参照）．従って L_γ は r 次元の開いた立方体と同相である．$\dim(N) = 0$ なるとき L_δ の元 l と N の元 n は可換であることを証明しよう．Nの一つの元 n を固定して考える．L_δ の元 l に対して $\psi(l) = l^{-1}nl$ を対応させる．写像 ψ は集合 L_δ から N の中への連続写像で，L_δ は連結，N は完全不連結故 $\psi(L_\delta) = n$ となる．従って $ln = nl, l \in L_\delta,$ である．いま γ を十分小なる正数で $L_\gamma{}^{*2} \subset L_\delta{}^*$ となるものとし，l_1 及び l_2 を L_γ の二つの元とする．上に証明したことから $l_1 l_2 = ln$ となり，l_1 及び l_2 の連続函数として $l \in L_\delta$ と $n \in N$ とが一意に定まる．函数 $n = n(l_1, l_2)$ は連結空間 $L_\gamma \times L_\gamma$ から0次元空間 N の中への連続写像であるから，像は一点でなければならぬ．$n(e, e) = e$ であるから L_γ に含まれる任意の l_1, l_2 に対して $n(l_1, l_2) = e$ である．従って $l_1 l_2 \in L_\gamma$ に対し $l_1 l_2 \in L_\delta$ である．$l_1 l_2 \in V_\gamma$ ならば $l_1 l_2 \in V_\gamma \frown L_\delta = L_\gamma$ である．従って L_γ は群芽であって L_γ からリー群芽 $L_\gamma{}^*$ 上への写像 φ は準同型を与える位相写像であるから，L_γ はリー群芽である．

$L = L_\gamma$ とおけば，r 次元の開いた立方体と同相な集合 L と0次元正規部分群 N は定理に述べた条件 a)—e) をみたす．上記の証明においては，N として G の0次元正規部分群で G/N がリー群となるようなものを勝手に一つとればよかったのである．このような N の存在することは前に証明した．そこで定理 69 は完全に証明された．

定理 70. 有限次元の局所連結なコンパクト群はリー群である．

証明. G を有限次元の局所連結なコンパクト群とする．定理 69 に依り群 G の単位元の近傍 V で開いた立方体 L と0次元の正規部分群 N との直積と同相

となるものが存在する．群 G が局所連結であるから，空間 V も局所連結である．N は0次元のコンパクト空間であるから，直積空間 $L\times N$ が局所連結となるのは N が［ディスクリートで従って］高々有限箇の点から成るときに限られる．このときは L 自身が G の単位元の一つの近傍であり，L はリー群芽である（定理69参照）から G はリー群である．

定理 71.　コンパクト群 G が位相空間としては多様体（§45参照）であるとき，G はリー群である．

証明.　多様体は常に有限次元で局所連結であるから，定理71は定理70から直ちに導かれる．

例 82.　G を有限次元の（r 次元とする）連結なコンパクト群とし，Z をその0次元の正規部分群とする．このとき Z は群 G の中心正規部分群であることを証明しよう．それと同時に，ある連結な r 次元リー群 $\hat{L}$ から G の中への1対1の準同型写像 ψ が存在して $\psi(\hat{L})$ は G の中で稠密な部分集合を作ることも証明する．

N_1 を G/N_1 がリー群となるような G の正規部分群とする（定理69参照）．群 $Z/(Z\frown N_1)$ はリー群 G/N_1 の部分群に同型であるから，$Z/(Z\frown N_1)$ は有限群である（(10)参照）．群 ZN_1/N_1 は有限群 $Z/(Z\frown N_1)$ と同型であるから，それ自身有限群であり，従って群 $N=ZN_1$ は0次元である．$L\subset G$ を r 次元のリー群芽で G の単位元の近傍 V が $V=LN$ のようにリー群芽 L と0次元の正規部分群 N の直積に分解するものとする（定理69参照）．いま U_1 を群 L における単位元の一つの連結な対称近傍とし，$U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$ を L の単位元における基を作る近傍の減少列とする．そして，$\hat{L}=U_1\smile U_1^2\smile\cdots\smile U_1^m\smile\cdots$ と置く．直ちに証明されるように $\hat{L}$ は抽象群 G の部分群である．単位元の完全近傍系を $U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$ として $\hat{L}$ に位相を入れる（定理9参照）．このようにして連結位相群 $\hat{L}$ が得られる．$\hat{L}$ の単位元の一つの近傍 U_1 の位相は G から誘導される U_1 の位相と同じであり，U_1 はリー群芽であるから，$\hat{L}$ はリー群となる．リー群 $\hat{L}$ の元 x に群 G の元 $\psi(x)=x$ を対応させれば，明らかにリー群 $\hat{L}$ から群 G の中への1対1の準同型写像 ψ が得られる．次に集合 $\hat{L}$ は G において稠

密であることを証明しよう．その為には，群 G の単位元の任意の近傍 W に対して集合 $\hat{L}W$ が G と一致することを証明すれば十分である．K を W に含まれる G の正規部分群で G/K がリー群となるものとする．このとき正規部分群 $N_2 = N \frown K$ を作ると G/N_2 はリー群である．φ を群 G から群 G/N_2 の上への自然準同型写像とする．このとき $\varphi\psi$ は群 $\hat{L}$ から群 G/N_2 の中への準同型写像である．G/N_2 は連結であり，群 $\hat{L}$ と群 G/N_2 の次元は一致するから，$\varphi\psi(\hat{L}) = G/N_2$ である．従って $\hat{L}N_2 = G$ であり，$N_2 \subset W$ であるから，$\hat{L}W = G$ である．

集合 U_1 の任意の元は集合 N の任意の元と可換である．従って，集合 $\hat{L}$ の任意の元は集合 N の任意の元と可換である．集合 $\hat{L}$ の閉苞は G と一致するから，群 G の任意の元が N の任意の元と可換となる．即ち N は群 G の中心正規部分群であることが証明された．$Z \subset N$ だから，Z もまた中心正規部分群である．

§48. 有限次元空間のコンパクトな推移的変換群

この§では先ず最初に，有限次元の空間のエフェクティブなコンパクト推移的変換群(§24 参照)はそれ自身有限次元であることを証明し，次に変換を受ける空間——均質空間[1] の局所的な構造を研究しよう．均質空間の各点は有限次元の開立方体と 0 次元の空間の直積と同相な近傍を有する．このとき，もしもこの 0 次元の空間が有限箇の点よりなるならば変換群はリー群である．かくして，均質空間が局所連結ならば，変換群はリー群であるという結果が得られる．

A)　G を 0 次元のコンパクト群とし，H をその部分群とする．このとき $\Gamma = G/H$ なる左剰余類の空間もまた 0 次元である．

これを証明しよう．§47 の命題 B)により群 G の単位元の近傍 U で，U に含まれる群 G の任意の正規部分群 N に対しては左剰余類の空間 $\Gamma^* = G/NH$ の次元は空間 Γ の次元よりも小でないようなものが存在する．定理 17 及び §16 の命題 F)によって群 G の開正規部分群 N で U に含まれるものは確かに存在する．この正規部分群 N は開部分群であるから，部分群 NH もまた開部分群である．従って［コンパクトなディスクリート］空間 G/NH は有限箇の点のみよりなり，

訳註 1)　空間 Γ が推移的変換群 G を有するとき，Γ を均質空間という．

従って0次元である．故に空間Γもまた0次元である．

B) Nをコンパクト群，φをNから［ある位相群へ］の準同型写像とする．またN'をNの単位元成分とする．このとき，群$\varphi(N)$の単位元成分は$\varphi(N')$である．

これを証明するために群$\varphi(N)$の単位元の成分を$\varphi(N)'$としよう．$\varphi(N')$は連結群であるから，$\varphi(N')\subset\varphi(N)'$である．次に$\varphi(N')\neq\varphi(N)'$と仮定しよう．このとき群$\varphi(N)/\varphi(N')$（§22, A)参照）の単位元成分は群$\varphi(N)'/\varphi(N')$であって，後者は単位元以外の元を含むから$\varphi(N)/\varphi(N')$は0次元ではない．一方，群$\varphi(N)/\varphi(N')$は群$N/N'$の或る剰余群に同型であるから，また0次元である（A)参照）．これは矛盾であるから$\varphi(N)'=\varphi(N')$でなくてはならぬ．

定理 72. 有限次元の位相空間Γのエフェクティブ且つ推移的なコンパクト変換群Gは有限次元である．

証明. 空間Γの一点を固定するGの元の全体が作る部分群をHとする．［Gがエフェクティブであるから］Hは$\{e\}$以外のGの正規部分群を含まない．左剰余類の空間G/Hは空間Γに同相であるからやはり有限次元である．§47, B)により群Gの単位元の近傍Uで，Gの正規部分群NでUに含まれるものに対しては常に

$$\dim(G/NH)\geqq\dim(G/H) \tag{1}$$

となるものが存在する．$N\subset U$でG/Nがリー群ならば

$$\dim(G/NH)=\dim(G/H) \tag{2}$$

であることを証明しよう．φを群Gからリー群$G^*=G/N$の上への自然準同型写像とし$H^*=\varphi(H)$とする．もちろんこのとき空間G^*/H^*は空間G/NHと同相である．リー群G^*とその部分群H^*に対して1径数部分群$g_1^*, \cdots, g_n^*, \cdots, g_r^*$を適当に選べば$|t^i|<\varepsilon, i=1, 2, \cdots, r$に対する$g_1^*(t^1)\cdots g_r^*(t^r)$の形の元から成る単位元の近傍を$W_\varepsilon$とするとき，$W_\varepsilon\cap H^*=M_\varepsilon$は$t^1=\cdots=t^n=0$で定義される$W_\varepsilon$の点となる（§44, A)参照）．ここで$n$は空間$G^*/H^*$の次元である．いま$g_1^*(t^1)\cdots g_n^*(t^n)$, $|t^i|<\varepsilon, i=1, \cdots, n$, のように表わされる点の全体を$\Lambda_\varepsilon^*$としよう．このとき群$G^*$の部分群$H^*$による剰余類$X^*$は$\Lambda_\varepsilon^*$と1点より

多くの点では交わらない．いま g_i を $|t|<\varepsilon$ で定義された群 G の1径数部分群であって，$\varphi(g_i(t))=g_i^*(t)$, $|t|<\varepsilon$, となるものとする（§47, 補助定理2参照）．点 $x^*=g_1^*(t^1)\cdots g_n^*(t^n)\in\Lambda_\varepsilon^*$ と点 $x=f(x^*)=g_1(t^1)\cdots g_n(t^n)$ は1対1に対応する．そこで $\Lambda_\varepsilon=f(\Lambda_\varepsilon^*)$ とおけば勿論 $\varphi f(x^*)=x^*$ であるから f は集合 Λ_ε^* から集合 Λ_ε の上への同相写像であって，f の逆写像 φ は Λ_ε から Λ_ε^* の上への同相写像である．いま x を Λ_ε に属する任意の点とすれば，剰余類 xH は集合 Λ_ε と点 x のみで交わる．何となれば，$xH\frown\Lambda_\varepsilon$ が x と異なる点を含めば1対1写像 φ により Λ_ε を Λ_ε^* へ写像すれば $\varphi(x)H^*$ は Λ_ε^* と2点以上で交わることになるが，上述のようにこれは不可能である．従って xH, $x\in\Lambda_\varepsilon$, なる形の剰余類の集合は n 次元の開いた立方体 Λ_ε^* と同相であるから $\dim(G^*/H^*)\leqq\dim(G/H)$ である．G^*/H^* と G/NH は同相であるから，いま得た不等式と（1）から等式（2）が得られる．

群 $G^*=\varphi(G)$ 及び $H^*=\varphi(H)$ は共にリー群であるから，等式（2）は

$$\dim(\varphi(G))-\dim(\varphi(H))=\dim\Gamma \tag{3}$$

と書換えられる．

この等式は準同型写像 φ の核 N が U に含まれ，像 $\varphi(G)$ がリー群であるときには常に成立つ．

$U\supset N$ なる正規部分群 N で G/N がリー群となるものを一つ固定して考え（定理67参照），N が0次元であることを証明しよう．$P=N\frown H$ とおき，V を G の単位元の任意の近傍とする．$K\subset V$ を G の正規部分群で G/K がリー群であるものとし $N_1=N\frown K$ とおく．G/N_1 もまたリー群である（§46, A）参照）．群 G から G/N_1 の上への自然準同型写像を φ_1 とすれば，$U\supset N_1$ であるから（3）により

$$\dim(\varphi_1(G))-\dim(\varphi_1(H))=\dim\Gamma \tag{4}$$

が成立つ．（3）式と（4）式から

$$\dim(\varphi_1(G))-\dim(\varphi(G))=\dim(\varphi_1(H))-\dim(\varphi(H)) \tag{5}$$

が成立つ．$\varphi_1(G)$ はリー群で $\varphi(G)=\varphi_1(G)/\varphi_1(N)$ であるから，$\dim(\varphi_1(G))-\dim(\varphi(G))=\dim(\varphi_1(N))$ であり，全く同様にして $\dim(\varphi_1(H))-\dim(\varphi(H))=\dim(\varphi_1(P))$ が成立つから，これらを（5）式に代入して $\dim(\varphi_1(N))=\dim$

$(\varphi_1(P))$が成立つ. 従って二つのリー群$\varphi_1(N)$と$\varphi_1(P)$は次元が等しく, 且つ$\varphi_1(P) \subset \varphi_1(N)$であるから, それらの単位元の成分$\varphi_1(N)'$と$\varphi_1(P)'$は一致する. N及びPの単位元の成分をN', 及びP'とすれば$\varphi_1(N') = \varphi_1(N)'$であるから(B)参照), $\varphi_1(N)'$のφ_1による完全原像は$N'N_1$であり, 同様に等式$\varphi_1(P') = \varphi_1(P)'$(B)参照)から$\varphi_1$による$\varphi_1(P)'$の完全原像は$P'N_1$である. $\varphi_1(N)' = \varphi_1(P)'$であるから$N'N_1 = P'N_1$でなければならぬ. 従って$N' \subset P'V$, $P' \subset N'V$が成立つ. この二つの包含関係は単位元の任意の近傍Vに対して成立つのだから, $N' = P'$でなければならない. N'は群Gの正規部分群Nの単位元の成分であるから, N'自身がまたGの正規部分群である. そこで$N' = P'$はHに含まれるGの正規部分群であるから, 単位元のみから成る. 故にNは0次元である.

最後に群Gが有限次元であることを示そう. いまGが有限次元でないと仮定し, sを$\dim(G/N)$より大きい任意の自然数とする. このとき§47, B) により近傍Vを適当に選ぶとき$\dim(G/N_1) \geqq s$となる. G/N_1はリー群であるから, $\dim(G/N_1) = \dim(G/N) + \dim(N/N_1)$となるが, $\dim(N/N_1) = 0$であるから(A)参照), これは[sに関する仮定と反し]矛盾である.

これで定理72が証明された.

定理 73. Gが有限次元の位相空間Γにエフェクティブに作用するコンパクトな推移的変換群とする. このとき空間Γの各点αはEuclid空間の開いた立方体Λと0次元のコンパクトな推移的変換群の作用する0次元のコンパクト空間Θとの直積$\Lambda \times \Theta$と同相な近傍Πを有する. 特にΘが有限箇の点から成るときは群Gはリー群である.

証明. 1点αを固定する元の全体が作る変換群Gの部分群をHとする. GのHによる左剰余類の空間G/HからΓの上への同相写像が存在し, その際点αは剰余類Hに対応するから, 定理を証明するためには空間G/Hにおける剰余類Hの近傍を考えればよい. 定理72によりGは有限次元であるから, その次元をrとする. このときGの単位元の近傍Vでリー群芽LとGの0次元の正規部分群Nの直積となるものが存在する(定理69参照). $P = N \frown H$とおけば群Gからリー群G/Nの上への自然準同型写像によりHは剰余群H/Pと同型

なリー群 G/N の部分群に写像されるから，H/P はリー群である．正規部分群 N が 0 次元だから，それに含まれる部分群 H の正規部分群 P も 0 次元である．従って定理 69 により群 H における単位元の近傍 W で，リー群芽 M と正規部分群 P との直積となるものが存在する．ここで $W\subset V$ であると仮定しても一般性を失うことはない．このとき M は連結で，N は 0 次元だから $M\subset L$ でなければならぬ．即ち，M はリー群芽 L の部分群芽である，いま D^* をリー群芽 L とその部分群芽 M とに対して作られた，L における一つの第 2 種標準座標系でその定義範囲 L_ε は $|t^i|<\varepsilon, i=1, \cdots, r,$ であり，また集合 $M_\varepsilon=L_\varepsilon\frown M$ は $t^1=t^2=\cdots=t^n=0$ で定義されるものとする(§44, A)参照)．更に L_ε の元で座標 t^i が $t^{n+1}=\cdots=t^r=0$ をみたすものの全体を Λ_ε とする．群 G における単位元の近傍 $L_\varepsilon N$ に含まれる任意の元は一意的に $\lambda mn,\ \lambda\in\Lambda_\varepsilon, m\in M_\varepsilon,\ n\in N,$ という積の形に表わされる．同様に群 H における単位元の近傍 $M_\varepsilon P$ に含まれる任意の元は一意的に $mp,\ m\in M_\varepsilon,\ p\in P,$ という形に表わされる．$L_\varepsilon N$ に含まれる二つの元 $\lambda_1m_1n_1$ と $\lambda_2m_2n_2$ が H による同じ左剰余類に含まれるならば，ε が十分小さいとき $\lambda_2m_2n_2=\lambda_1m_1n_1\cdot mp,\ m\in M, p\in P,$ となるから，$\lambda_1m_1n_1$ と $\lambda_2m_2n_2$ が H による同一の左剰余類に属するためには $\lambda_1=\lambda_2$ で n_1 と n_2 が群 N の P による同一の左剰余類に属することが必要且つ十分である．これから直ちに $L_\varepsilon N$ の元を含む左剰余類の全体からなる，空間 G/H における点 H の近傍 Π は開立方体 Λ_ε と空間 N/P との直積と同相であることが知られる．

A)によって空間 N/P は 0 次元である．ここで空間 N/P が有限箇の元から成ると仮定して，G がリー群となることを証明しよう．このとき N/P はディスクリートだから P は N の開部分群であり，従って群 G における単位元の近傍 U で，$U\frown N=P\frown U$ となるものが存在する．$K\subset U$ を G/K がリー群となるような G の正規部分群とする(定理 67 参照)．G/K がリー群であるから $N/(N\frown K)$ もリー群であるが，$N/(N\frown K)$ は 0 次元だから (A)参照) $N\frown K$ は N の開部分群である．$K\subset U$ でしかも $N\frown U=P\frown U$ だから $N\frown K=P\frown K$ である．このようにして H は G の正規部分群 $N\frown K$ を含むことになるが，[G がエフェクティブだから] $N\frown K$ は単位元だけから成る．そこで群 N の単位元は N の開集合となり，

従ってNは[ディスクリートだから]有限箇の点のみより成る．それ故L_εはGにおける単位元の一つの近傍となり，L_εがリー群芽だからGがリー群となる．

これで定理73は証明された．

定理 74. 有限次元の局所連結位相空間Γにエフェクティブ且つ推移的に作用するコンパクトな変換群は常にリー群である．

証明． 定理73により1点$\alpha\in\Gamma$の近傍Πで球の内部Λと0次元コンパクト位相空間Θの直積と同相なるものが存在する．コンパクト空間Θは有限箇の点から成るか，または集積点を持つ．ところが後の場合はΘが0次元でしかも空間Πが局所連結だから起り得ない．従って空間Θは有限箇の点から成る故，定理73によりGはリー群である．

これで定理74は証明された．

定理 75. 多様体(§45参照)Γにエフェクティブ且つ推移的に作用するコンパクト変換群は常にリー群である．

証明． 多様体は局所連結で有限次元であるから，定理75の正しいことは定理74から直ちに知られる．

例 83. Gをn次元球面と同相な位相空間Γのエフェクティブ且つ推移的なコンパクト変換群とする．任意のこのようなGに対して，空間Γを$n+1$次元Euclid空間内のn次元球面S^nの上へ写す同相写像で，それによりGがS^nの回転の作る群となるものが存在するか？　定理75によりGはリー群となるから，これはリー群論の問題である．これは未解決であるが，興味のある問題である．

例 84. Gを有限次元位相空間Γにエフェクティブ且つ推移的に作用するコンパクトで連結な変換群とする．このときΓの1点を固定するGの元が作る部分群Hはリー群である．群Gは有限次元である(定理72参照)から，Gの0次元正規部分群NでG/Nがリー群となるものが存在する(定理69参照)．Gが連結だから正規部分群NはGの中心に含まれ(例82参照)，従って$N\frown H$は単位元のみから成る．[Gがエフェクティブだからである．]そこで群Gからリー群G/Nの上への自然準同型写像により部分群Hはリー群G/Nのある部分群に同型に写されることになるから，H自身もリー群である．

第9章　局所同型群

この章の第一の目的は，互に局所同型な群の間の大域的な関係を，詳しく調べることにある．この問題の重要性は，リー群の例一つをとっても，十分に示すことができる．以前のいわゆるリー群論では，その殆ど全部の目標が，群の局所的性質の研究に向けられていた．この理論によって，リー群の局所的性質の研究は，純代数学的対象たる**リー代数**(第10章参照)の研究に帰着させることができる．これに対し，リー群の大域的な研究は，位相幾何学的な諸手段，特に局所同型な群の間の関係の解明を必要とする．この問題には以前にも触れたことがあるが(定理18参照)，この章では，より狭い範囲の群（ただし連結リー群はすべて含まれる)について，一層深い諸結果を導く．この範囲に含まれる任意の群 G に対しては，次の性質をもつ群 $\tilde{G}$ が作られる．すなわち，G に局所同型なあらゆる群は，$\tilde{G}$ の適当なディスクリート（従って定理15により，中心）正規部分群 N に関する剰余群 $\tilde{G}/N$ に（大域的に)同型となる．このような群 $\tilde{G}$ のことを，群 G の**普遍被覆群**と名づける．$\tilde{G}$ は G に局所同型なすべての群に対する普遍被覆群でもあり，互に局所同型な群がつくる類により一意的に定められる．

この結果により，互に局所同型な群の一つの類に含まれる群すべてを研究することは，唯一つの群——この類に属する群に対する普遍被覆群——の研究に，本質において帰着することになる．ただし，これは群の大域的な研究を，その局所的な研究に帰着せしめるものでは決してない．

普遍被覆群を構成するに当っては，**基本群**および**被覆空間**なる位相幾何学的な道具立てを用いる．既に Poincaré によって導入されたこれらの概念は，極めて重要であると共にそれ自身としての興味も深いので，位相群論のために必要と思われる以上に，少し詳しくたち入ることにした．

この章の位相群論に関係した諸結果は，形式的には Schreier〔40, 41〕に負うものである．始めて正確な表現を与えたのは彼であったが，既にそれまでにも

これらの結果は知られており，例えば H.Weyl〔45〕の論文中に用いられている．

§49. 基 本 群

基本群は，位相空間の位相不変量のうち，最も重要なものの一つである．一般の場合には，この群は可換でなく，空間のもつ極めて重要な位相的性質を代表する．この§では，基本群の定義を与えると共に，基本群や被覆空間の導入に不自然を伴わない位相空間の種類を，予め明確に限定しておく．すなわち，この章で扱う位相空間はすべて弧状連結，局所連結かつ局所単連結空間とする．

A)　実径数 t, $0 \leqq t \leqq 1$, の連続函数 f が，各 t, $0 \leqq t \leqq 1$, に対し位相空間 R の点 $f(t)$ を対応させるとき，R に**道** f が与えられたという．点 $f(0)$ を道 f の**始点**，$f(1)$ を**終点**とよび，f は空間 R において点 $f(0)$ と点 $f(1)$ を**結ぶ**という．函数 $f(t)$ が恒等的に 1 定点だけを値として取るとき，f は**単位の道**であるという．与えられた道 f に対して，t の函数 $f(1-t)$ によって定義される道を，f の**反対の道**，あるいは f の**逆の道**といい，f^{-1} で表わす．二つの道 f, g があって，f の終点と g の始点とが一致する $(f(1)=g(0))$ とき，これらの道の**積** $h=fg$ を，$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ に対しては $h(t)=f(2t)$，$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ に対しては $h(t)=g(2t-1)$ とおいて得られる函数 $h(t)$，$0 \leqq t \leqq 1$，により定義する．

f の始点と終点とが一致するとき，f は**閉じている**，あるいは**閉道**であるという．空間 R の中の道の全体が上に定義した積によって群を作っているわけではない．まず，乗法がいつも可能とは限らないし，その乗法も結合律をみたさず，f にその逆の道 f^{-1} を乗じても単位の道とはならない．更に，道 f と単位の道との積は f 自身ではなく，何か別の新しい道であるに過ぎない．このような事情からも知れるように，そもそも興味の中心となるのは道自身ではあり得ない．重要なのは，実は，互に**同値**あるいは**ホモトープ**な道からなる**類**であって，これらの類の集合の或るものが群を作り，それが**基本群**に他ならない．

B)　空間 R に二つの道 f, g があって，f をその両端は動かさずに連続的に変形して，g に一致させることができるとき，f と g とは**ホモトープ**あるいは**同値**であるといい，$f \sim g$ と記す．更に正確に言えば，道 f, g が互にホモトープ

であるとは，二つの実径数 s および t, $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$, の連続函数 $\varphi(s,t)$ が存在して，$\varphi(0,t)=f(t), \varphi(1,t)=g(t), \varphi(s,0)=f(0)=g(0), \varphi(s,1)=f(1)=g(1)$ をみたすことをいう．連続的に動く道 φ_s; $\varphi_s(t)=\varphi(s,t)$ は，f から g への道の**変形**を与えるという．閉じた道 f が単位の道にホモトープであるとき，f は**ホモトープ 0** あるいは **0 に同値**であるといい，$f\sim 0$ と書く．

道の間にこのようにして導入されたホモトープなる概念に対して，反射律：$f\sim f$; 対称律：$f\sim g$ ならば $g\sim f$; 推移律：$f\sim g$ および $g\sim h$ ならば $f\sim h$, が成り立つことは容易に知られる．f にホモトープなすべての道から成る類を $\{f\}$ で表わす．$f\sim f', g\sim g'$ で，積 fg が定義されているならば，$f'g'$ なる積も定義できて，

$$fg\sim f'g';$$

また，

$$f^{-1}\sim f'^{-1}$$

であることは容易に確かめられよう．

C)　f は任意の道，e と e' は共に単位の道であって，$e(1)=f(0)$, $f(1)=e'(0)$ であるとすれば，

$$ef\sim f, \tag{1}$$

$$fe'\sim f. \tag{2}$$

三つの道 f, g, h において，$f(1)=g(0), g(1)=h(0)$ であれば，

$$(fg)h\sim f(gh). \tag{3}$$

また，任意の道 f につき，

$$ff^{-1}\sim 0, \tag{4}$$

$$f^{-1}f\sim 0. \tag{5}$$

上の三つの主張を証明するために，次の一般的な注意をまず述べる．k を任意の道，I を単位区間：$0\leqq t\leqq 1$, とし，χ は I をそれ自身に写す連続写像であって $\chi(0)=0$ なるものとする．このとき，$k_\chi(t)=k(\chi(t))$ とおけば，函数 k_χ は $k(0)$ を始点とする道を定義する．この道につき，もし $\chi(1)=1$ ならば，

$$k_\chi\sim k; \tag{6}$$

もし$\chi(1)=0$ならば,

$$k_\chi \sim 0 \tag{7}$$

である. 何故ならば, $\chi(1)=1$のときには函数$\varphi(s,t)=k(st+(1-s)\chi(t))$は道$k_\chi$から$k$への変形を与え, $\chi(1)=0$のときには函数$\varphi(s,t)=k((1-s)\chi(t))$が$k_\chi$から単位の道への変形を与えるからである.

さて, (1)を証明するために, 写像χを次のように定義する. すなわちχは, 線分$\left[0,\frac{1}{2}\right]$を0に写し, 線分$\left[\frac{1}{2},1\right]$の上では1次函数で$\left[\frac{1}{2},1\right]$を線分$[0,1]$に写像するものとする. このときには$f_\chi=ef$であり, (6)によって(1)が成立つ. 同様に, (2)の証明のための写像χも, 容易に定められる.

(3)を示すために, $k=f(gh)$とおき, 写像χとしては, 線分$\left[0,\frac{1}{4}\right]$を$\left[0,\frac{1}{2}\right]$に写し, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$を$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$に写し, $\left[\frac{1}{2},1\right]$を$\left[\frac{3}{4},1\right]$に写す三つの1次函数を組合わせた写像をとる. すると, $k_\chi=(fg)h$であり, (6)によって(3)が成立つ.

(4)を証明するためのχとしては, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$は$[0,1]$に, $\left[\frac{1}{2},1\right]$は$[1,0]$に写す1次函数の組合わせをとる. すると, $f_\chi=ff^{-1}$であり, (7)により(4)が成立つ. また, 任意の道fにつき(4)は成立ち, 従ってfをf^{-1}でおきかえてよいから, (5)は(4)から導かれる.

このようにして, C)の主張はすべて証明された.

次のD)に述べる定義は, 基本群および被覆空間の考察に不自然を伴わないように, 予め空間の種類を限定するためのものである.

D) 空間Rが**弧状連結**であるとは, その任意の2点を道で連結できることをいう. 空間Rが**局所連結**であるとは, 任意の点$p\in R$の各近傍Uに対して, pの適当な近傍$V\subset U$が存在して, pと任意の点$x\in V$とを, Uにすっかり含まれる道により連結できることをいう. また, 空間Rが**局所単連結**であるとは, その任意の点pの任意の近傍Uに対して, pの適当な近傍$V\subset U$が存在して, pを始点としV内にすっかり含まれるすべての閉じた道がU内においてホモトープ0であることをいう. 局所連結空間Rには, 弧状連結な開集合ばかりから成る完全近傍系が存在することが証明される.

その証明を実行するために，a を任意の点，U をその任意の近傍とする．U の点であって，a と U 内の道により連結できるもの全体の集合を W で表わす．集合 W は明らかに弧状連結であるが，これが更に開集合であることを示す．$p \in W$ とし，V は p の U に含まれる近傍であって，V の任意の点 x は p と，U 内の道により連結できるものとする．空間 R が局所連結であることによって，点 p のこのような近傍 V の存在は保証されている．点 a と p とは U 内の道で連結され，また点 p と x とはやはり U 内の道で連結されるから，これら二つの道の積は点 a と点 x とを連結する．従って $p \in V \subset W$．p は W の任意の点であったから，W は開集合である．

ここに与えた局所連結の定義は，§15, H) での定義と異なっていることを，ことわらねばならない．以後，局所連結というときは，すべてここで与えた定義によるものとする[1]．

定義 44. 弧状連結(D)参照)位相空間 R の1点を p とする．p を始点とする R の閉じた道の全体を P で表わす．P のうち互にホモトープな道を一つの類にまとめることにすると(B)参照)，P はいくつかの類に分かれる．このようにして得られた道の類の集合を $\pi_1(R, p) = \pi_1(R) = \pi_1$ で表わし，この中に群演算としての乗法を次のように定義する．π_1 の2元を $\{a\}, \{b\}$ としよう．道 a および b は，共に始点と終点が p であるから，その間に乗法が可能である(A)参照)．$c = ab$ とすれば，B) から，類 $\{c\}$ は類 $\{a\}$ および $\{b\}$ により一意的に定まる．そこで，$\{a\}\{b\} = \{c\}$ として，$\{a\}, \{b\}$ の積を定義する．このようにして作られた群 π_1 は同型を除き点 p の取り方に依存しない．また π_1 は空間 R の位相不変量である．これを R の**基本群**とよぶ．群 $\pi_1(R)$ が単位元だけから成るとき，空間 R は**単連結**であるという．

上のように π_1 に定義した乗法が定義1の条件をみたしていることの検証は容易である．先ず，結合律は(3)により成立つ．π_1 の単位元は，ホモトープ0の道から成る類である((1)—(2)参照)．そして，元 $\{a\}$ の逆元は，$\{a\}^{-1} = \{a^{-1}\}$ である(B)および(4)—(5)参照)．

訳註 1)　ここでいう意味の局所連結性を通常，局所弧状連結という．

次に，空間 R の基本群 π_1 が点 p の選び方に関係なく定まることを証明しよう．すなわち，p' を他の勝手な点として，$\pi'_1 = \pi_1(R, p')$ が π_1 と同型であることを示す．

p' から p に到る一つの道を f とする．R は仮定により弧状連結(D) 参照)であるから，このような道 f は必ず存在する．$\{a\}$ を群 π_1 の任意の元として，$a' = faf^{-1}$ とおく．B) から，類 $\{a'\}$ は類 $\{a\}$ により一意的に定まる，言いかえれば，（もちろん，道 f は固定して考えて，）類の代表としての道 a の選び方に依存せず類 $\{a'\}$ が定まる．$\{a'\} = \varphi(\{a\})$ として，写像 φ が群 π_1 から π'_1 の上への同型写像を与えることを証明しよう．先ず，φ は1対1対応である．何故ならば，$f^{-1}a'f$ なる道を考えると，$f^{-1}a'f = f^{-1}faf^{-1}f$ で，これは道 a にホモトープである(C), B)参照)．従って，類 $\{a\}$ は逆に類 $\{a'\}$ により一意的に定まり，よって対応 φ は1対1である．この考察における群 π_1 と π'_1 の役割が完全に対称であることから，φ が群 π'_1 の上への写像であることが知られる．また，乗法演算が写像 φ により保存されることの検証も容易である．実際，$\{a\}$，$\{b\}$ を π_1 の任意の2元とし，$a' = faf^{-1}$, $b' = fbf^{-1}$, $c = ab$ とおく．C) および B) により，道 $a'b'$ は fcf^{-1} にホモトープであり，これは $\varphi(\{a\}\{b\}) = \varphi(\{a\})\varphi(\{b\})$ であることを意味する．以上で，π_1, π'_1 の同型が証明された．

しかしいま考えた同型写像 φ は，道 f の選び方によって変り得るものであることを注意しておく必要がある．すなわち，φ は一意的に定まる性質のものではない．特に，p と p' とが一致する場合，f として p を始点とする閉じた道を勝手に一つ取って，上記の考察をそのまま行なうことができる．このときの写像 φ は，群 π_1 の自己同型写像を与え，さらにそれが内部自己同型写像であることも容易に確かめられよう(§3, B)参照)．

E)　弧状連結空間 S から弧状連結空間 R への連続写像 φ が与えられ，$p \in R$, $q \in S$, $\varphi(q) = p$ であるとする．点 q を始点とする S の任意の閉じた道 g は，写像 φ によって，

$$f(t) = \varphi(g(t))$$

で定義される p を始点とする R の閉じた道 $\varphi(g) = f$ に写される．明らかに，

この写像は，道の積を各道の像の積に写し，ホモトープな道はやはりホモトープな道に写す．従って，φ は群 $\pi_1(S, q)$ から群 $\pi_1(R, p)$ の中への準同型写像をひき起す．この準同型写像を $\hat{\varphi}$ と記す．

F) R, S を二つの弧状連結位相空間として，その直積を T で表わす（§14, A）参照）．このとき，位相空間 T は弧状連結であって，その基本群は，それぞれの空間 R, S の基本群の直積に同型である（§5, A）参照）．従って，特に，二つの単連結位相空間の直積は単連結である．

証明のために，空間 R, S にそれぞれ一つずつ点：$p \in R, q \in S$, を固定する．このとき，$(p, q) \in T$ は空間 T の或る点を表わしている．R に p を始点とする勝手な道 f を，また S に q を始点とする勝手な道 g をとる．すると，函数 $(f(t), g(t))$ は空間 T に一つの道を定義するが，この道を (f, g) と書く．(f, g) は (p, q) を始点とし，終点は $(f(1), g(1))$ である．空間 R および S は共に弧状連結であるから，f, g を適当に取ることにより f, g の終点はそれぞれの空間で全く任意に取ることができる．従って，道 (f, g) の終点も任意に選ぶことができて，空間 T において，任意の点は点 (p, q) と道により連結されることになる．すなわち，T は弧状連結である．

明らかに，(p, q) を始点とする T の任意の道 h は，(f, g) なる形に表わされる．また，容易に知れるように，$f' \sim f, g' \sim g$ ならば，$(f', g') \sim (f, g)$．逆に，$(f', g') \sim (f, g)$ ならば，$f' \sim f, g' \sim g$ である．さらに，道 f, g が共に閉じているならば，(f, g) も閉じた道であり，またその逆も成立つ．そして，f, g, f', g' がすべて閉じた道であるならば，積 $(f, g) \cdot (f', g')$ は (ff', gg') に等しい．

上記のすべてのことから，空間 T の基本群の各元は，R, S の基本群の元の組として一意的に表わされ，その際，§5, A）における直積の定義の条件をすべてみたす．こうして，F）の主張は証明されたわけである．

G) G を位相群とする．f は空間 G 内の道，a は群 G の元であるとき，af, fa によって，それぞれ点 $af(t)$ あるいは $f(t)a$ のえがく道を表わすことにする．空間 G の二つの道 f, g が共に e を始点としているならば，ホモトープ関係

$$f(f(1)g) \sim g(f \cdot g(1)) \tag{8}$$

が成立つことが証明される．この関係からは，その特別な場合として，弧状連結群 G の基本群は可換であることが導かれる．実際に，f, g を共に e に始まる閉じた道に取れば，関係（8）は

$$fg \sim gf$$

となり，これは G の基本群の可換性を示すものに他ならない．

（8）を示すために，2変数 s, t の函数 $\varphi(s, t) = f(s)g(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$, を考える．φ は，正方形 $0 \leqq s \leqq 1$；$0 \leqq t \leqq 1$ から空間 G の中への連続写像を与える．この正方形の頂点を a, b, c, d で表わすことにし，$a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (1, 1)$, $d = (0, 1)$ とする．明らかに，折線 abc および adc に沿う道は正方形内において互にホモトープであり，写像 φ により，道 abc は $f(f(1)g)$ に，道 adc は $g(f \cdot g(1))$ に写される．従って，（8）が成立つ．

例 85. 任意の次元の Euclid 空間，および次元が1より大なる球面の基本群は，共に単位元のみからなることを証明しよう．

E を Euclid ベクトル空間とする．各ベクトル $x \in E$ にベクトル $\varphi_s(x) = (1-s)x$, $0 \leqq s \leqq 1$, を対応させる．この対応 φ_s は空間 E をそれ自身の中に写し，かつ空間全体を0に連続的に変形する．この変形 φ_s を，0を始点とする任意の閉じた道 f に適用して，直ちに，空間 E の基本群が単位元しか含まないことを知る．

次に，Euclid 空間 E の次元が $n+1$ であるとき，n 次元球面 S は E における方程式 $(x, x) = 1$ により定義することができる．$p \in S$ とし，方程式 $(p, x) = 0$ の定める超平面を $E' \subset E$ で表わす．そして，空間 $S \diagdown p$ を点 p からの射影により超平面 E' に写す写像を ψ とする．すなわち，

$$\psi(x) = \frac{1}{1-(p, x)} \cdot x - \frac{(p, x)}{1-(p, x)} \cdot p, \qquad x \in S \diagdown p.$$

直ちに確かめられるように，ψ は空間 $S \diagdown p$ から E' 全体への位相写像を与える．空間 E' の任意の閉じた道はホモトープ0であるから，空間 $S \diagdown p$ の任意の閉じた道もまたホモトープ0である．$n \geqq 2$ の場合には，p と相異なる点を始点とする S の任意の閉じた道は，容易に知れるように，p を通らない道にホモトープである．従って，$n \geqq 2$ のとき球面 $S = S^n$ の基本群は単位元のみからなる．

§50. 被覆空間

被覆空間は，数学の種々の分野において，本質的な役割を演ずる．例えば，多価解析函数の Riemann 面は，函数が正則な領域の被覆面，正確にはそれに有限分岐度の分岐点および極をつけ加えたものに外ならない．多価函数は，Riemann 面の上の函数としては 1 価函数となる．他のいくつかの場合にも，同じく多価函数を一意化することを目的として，被覆空間が構成される．位相群論における被覆空間の構成は普遍被覆群を作るためのものである．この§では，被覆空間の位相理論を述べる．

定義 45. 空間 R^* から空間 R の上へ連続写像 ω があって，任意の $a \in R$ につきその適当な近傍 U をとれば，完全原像 $\omega^{-1}(U)$ は，おのおの ω により U の上へ位相的に写像され，かつ互に交わることのない有限箇あるいは無限箇の開集合の和に分かれるとき，ω を**被覆写像**あるいは単に**被覆**，R^* を R の**被覆空間**とよぶ．また以下においては，上記の性質を有する U は**正則に被覆**された近傍であるといい，ω により U の上へ位相的に写像される各開集合 $V \subset R^*$ は近傍 U を**正則に被覆**するということにする．二つの空間 $R_1{}^*$ および $R_2{}^*$ から空間 R への被覆写像 ω_1 および ω_2 が互に**同値**であるとは，$R_1{}^*$ から $R_2{}^*$ の上への同相写像 φ が存在して，$\omega_2\varphi = \omega_1$ であることをいう．

弧状連結，局所連結かつ局所単連結な空間の，弧状連結空間による被覆をすべて見いだすこと，これが以下に述べることの目標である．

A) ω は空間 R^* から R の上への被覆写像，U は正則に被覆される R の近傍，V は U を正則に被覆する R^* の開集合であるとする．さらに，或る連結空間 S から R^* の中への連続写像 f があって，$\omega f(S) \subset U$ でかつ共通部分 $f(S) \cap V$ が空集合でないならば，$f(S) \subset V$ である．

何故ならば，集合 $f(S)$ は $\omega^{-1}(U)$ に含まれるが，$f(S)$ は連結集合であるから，共通部分を有しない二つの開集合 V および $\omega^{-1}(U) \setminus V$ の両方に交わることはできない．

B) ω は空間 R^* から R の上への被覆写像，f は R 内の道であるとする．空間 R^* 内の道 f^* は，$\omega f^*(t) = f(t)$ であるとき，道 f を**被覆する**という．R

内に一つの道 f を与え，R^* に $\omega(a^*) = a = f(0)$ をみたす点 a^* を与えるとき，f を被覆し a^* を始点とする道 f^* が R^* 内にただ一つ存在する．さらに，道 f を，始点 a を固定して連続的に変形させるとき，固定点 a^* を始点にもち f を被覆する道 f^* もまた連続的に変形する．その際，もし f の終点が動かないならば，f^* の終点も動かない．

命題 B) を証明しよう．固定点 $a \in R$ を始点にもち，径数 s と共に連続的に動く道を f_s とし，$f(s,t) = f_s(t)$ とおく．実数直線上の区間 $[0,1]$ を I で表わす．$f(s,t)$ は正方形 $I \times I$ の上で定義された連続函数である．正方形 $I \times I$ がコンパクトであることから，次の性質をもつ正数 ε の存在が保証される：任意の点 $(s_0, t_0) \in I \times I$ につき，点 $f(s_0, t_0)$ の適当な正則に被覆される近傍 $U(s_0, t_0)$ は，$|s - s_0| \leqq \varepsilon$, $|t - t_0| \leqq \varepsilon$ なるすべての点 $f(s,t)$ を含む．$\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, ただし n は自然数，としてよい．いま，$t \leqq p\varepsilon$ なるとき，

$$f^*(s, 0) = a^*, \quad \omega f^*(s,t) = f(s,t) \qquad (1)$$

をみたす連続函数 $f^*(s,t)$ が既に定義されていて，しかも t のこの範囲の値に対してはかかる $f^*(s,t)$ が唯一つに限ることも証明されていると仮定する．そして次に，$t \leqq (p+1)\varepsilon$ に対する函数 $f^*(s,t)$ を作って，さらにその一意性を証明しよう（証明は帰納法によるが，$p = 0$ に対する上記の仮定が正しいことは明らか）．$U(s_0, p\varepsilon)$ を正則に被覆する R^* の開集合で，点 $f^*(s_0, p\varepsilon)$ を含むものを $V(s_0, p\varepsilon)$ で表わし，$U(s_0, p\varepsilon)$ を $V(s_0, p\varepsilon)$ の上に写す同相写像で，ω の逆になっているものを ω' とする．もし（1）をみたす t の連続函数 $f^*(s_0, t)$ が存在するとすれば，A)に示したことによって，$|t - p\varepsilon| \leqq \varepsilon$ の範囲では，それは

$$f^*(s_0, t) = \omega' f(s_0, t) \qquad (2)$$

によって定義されなければならぬ．逆に，$p\varepsilon \leqq t \leqq (p+1)\varepsilon$ に対して（2）によって定義される函数 $f^*(s_0, t)$ は，径数 t につき連続であって，条件（1）をみたす．帰納法の仮定によって $f^*(s, p\varepsilon)$ は径数 $s\,(0 \leqq s \leqq 1)$ に関し連続な函数であるから，A)により $|s - s_0| \leqq \varepsilon$ につき $f^*(s, p\varepsilon) \in V(s_0, p\varepsilon)$ である．また，函数 $f^*(s,t)$ の t についての連続性から，再び A) によって，$|s - s_0| \leqq \varepsilon$, $|t - p\varepsilon| \leqq \varepsilon$ のとき $f^*(s,t) \in V(s_0, p\varepsilon)$．従って，$|s - s_0| \leqq \varepsilon$, $|t - p\varepsilon| \leqq \varepsilon$ においては，

函数 $f^*(s,t)$ は $f^*(s,t)=\omega' f(s,t)$ によって定義され，$f(s,t)$ は連続函数，ω' は連続写像であることから，$f^*(s,t)$ のこの範囲における連続性が出る．

f が径数 s に依存しない R の道であるときには，$f_s=f$, $0\leqq s\leqq 1$ とおけば，上に証明したことから，f を被覆する道 f^* の存在と一意性とが結論される．

次に，f_s が固定点 b を終点とする場合には，既に示したように $f^*(s,1)$ が s の連続函数であることと，A) とによって，$f^*(s,1)\in V(0,1)$ であり，従って s に関する函数 $f^*(s,1)$ の値は 1 定点である．

これで，B) の証明は終った．

念のために，群論における次の基礎的な定義に触れておく．群 G の二つの部分群 H_1 および H_2 が**共役**であるとは，元 $g\in G$ が存在して，$H_2=g^{-1}H_1g$ であることをいう．共役の関係は，明らかに，反射的，対称的，推移的であるから，G の部分群全体の集合は，互に共役な部分群を一つの類にまとめることにより，いくつかの互に交わることのない類に分けられる．

定理 76. ω は弧状連結空間 R^* から弧状連結空間 R の上への被覆写像，p は R の固定点，p^* は R^* の点で $\omega(p^*)=p$ であるとする．このとき，準同型写像 $\hat{\omega}$(§49, E)参照)は，群 $\pi_1(R^*,p^*)$ から $\pi_1(R,p)$ の或る部分群 $\rho(\omega,p^*)$ の上への同型写像である．さらに，p^* が集合 $\omega^{-1}(p)$ のすべての点を動くとき，部分群 $\rho(\omega,p^*)$ は，$\pi_1(R,p)$ の共役部分群からなる一つの類（この類を $\sigma(\omega)$ と記す）に属するすべての部分群の上にわたって動く．

証明. p^* に始点をもつ R^* の任意の閉じた道を f^* として，$f=\omega f^*$ とおく．もしも道 f が R においてホモトープ 0 ならば，f^* は R^* においてホモトープ 0 である(B) 参照)．従って，準同型写像 $\hat{\omega}$ は，或る部分群 $\rho(\omega,p^*)$ の上への同型写像である．

p_1^*, p_2^* を集合 $\omega^{-1}(p)$ の任意の 2 点として，f_1^* および f_2^* はそれぞれ p_1^* および p_2^* に始点をもつ閉じた道，g^* は点 p_1^* から p_2^* に到る道であるとする．$\omega f_1^*=f_1$, $\omega f_2^*=f_2$, $\omega g^*=g$ とおけば，f_1, f_2, g はすべて閉じた道で，p を始点としている．二つの道 f_1^* および $g^*f_2^*(g^*)^{-1}$ は共に p_1^* を始点とする閉じた道であるから，その像 f_1 および gf_2g^{-1} は，部分群 $\rho(\omega,p_1^*)$ に属する元 $\{f_1\}$ お

よび $\{g\}\{f_2\}\{g\}^{-1}$ をそれぞれ定義する．全く同様に，部分群 $\rho(\omega, p_2{}^*)$ に属する2元 $\{f_2\}$ および $\{g\}^{-1}\{f_1\}\{g\}$ が定義される．ところで，$\{f_1\}$ および $\{f_2\}$ は，それぞれ $\rho(\omega, p_1{}^*)$ および $\rho\{\omega, p_2{}^*\}$ に属する任意の元でよいわけだから，上のことから $\{g\}\rho(\omega, p_2{}^*)\{g\}^{-1}\subset\rho(\omega, p_1{}^*)$, $\{g\}^{-1}\rho(\omega, p_1{}^*)\{g\}\subset\rho(\omega, p_2{}^*)$ でなければならぬ．すなわち，

$$\rho(\omega, p_2{}^*) = \{g\}^{-1}\rho(\omega, p_1{}^*)\{g\}. \qquad (3)$$

部分群 $\rho(\omega, p_1{}^*)$, $\rho(\omega, p_2{}^*)$ は互に共役であることがこれで証明された．次に今度は，$p_1{}^*$ は $\omega^{-1}(p)$ 内の与えられた点であると考え，$\pi_1(R, p)$ から任意の元 $\{g\}$ を選び，道 g を被覆し $p_1{}^*$ に始点をもつ道が g^* であるとする．g^* の終点を $p_2{}^*$ とする．このとき点 $p_2{}^*$ は $\omega^{-1}(p)$ に属するから，(3)の関係が成立つ．ところがこのことは，$\rho(\omega, p_1{}^*)$ に共役な任意の部分群が $\rho(\omega, p_2{}^*)$, $p_2{}^*\in\omega^{-1}(p)$ の形の群であることを示している．従って，$\rho(\omega, p^*)$, $p^*\in\omega^{-1}(p)$ の形の部分群の全体は，$\pi_1(R, p)$ の或る部分群の共役類と集合として一致し，定理 76 の証明が終った．

C) ω は空間 R^* から空間 R の上への被覆写像，$p\in R$, $p^*\in\omega^{-1}(p)$ とし，$f_1{}^*$, $f_2{}^*$ は共に p^* を始点とする道であるとする．このとき，$f_1{}^*$ と $f_2{}^*$ との終点が一致するための必要十分条件は，それらの像 $f_1 = \omega f_1{}^*$ および $f_2 = \omega f_2{}^*$ の終点が一致して，かつ $\{f_1\}\{f_2\}^{-1}\in\rho(\omega, p^*)$ なることである．特に，$f_1{}^*$ が閉じた道であるための必要十分条件は，道 f_1 が閉じていて $\{f_1\}\in\rho(\omega, p^*)$ なることである．

先ず，f_1 が閉じている特殊な場合から考える．もし $f_1{}^*$ が閉じた道ならば，定義からして，$\{f_1\}\in\rho(\omega, p^*)$．逆に，もし $\{f_1\}\in\rho(\omega, p^*)$ ならば，R^* には p^* を始点とする閉じた道 h^* で，その像 $\omega h^* = h$ が $\{f_1\}$ に属するものが存在する．h は f_1 にホモトープであるから，h を連続的にその両端を動かさないで f_1 にまで変形することができるが，このときそれを被覆する道 h^* も両端を動かさない連続変形によって $f_1{}^*$ に移る(B)参照)．故に，h^*, $f_1{}^*$ の終点は一致するが，h^* は閉じているから，$f_1{}^*$ も閉じている．

次に，一般の場合に C) を証明する．もしも，$f_1{}^*$, $f_2{}^*$ の終点が一致すれば，f_1, f_2 の終点も一致し，また道 $f_1{}^*(f_2{}^*)^{-1}$ は閉じているから，$\{f_1\}\{f_2\}^{-1}\in\rho(\omega,$

p^*)である．逆に，f_1, f_2 の終点が一致して，$\{f_1\}\{f_2\}^{-1}\in\rho(\omega, p^*)$ と仮定する．$f_1^*(1)$を始点として f_2^{-1} を被覆する道を $(g_2^*)^{-1}$ と表わせば，$f_1^*(g_2^*)^{-1}$ は閉じた道 $f_1f_2^{-1}$ を被覆する道である．すると先に示したことにより，道 $f_1^*(g_2^*)^{-1}$ は閉じているから，$(g_2^*)^{-1}$ の終点は p^* である．従って，g_2^*, f_2^* は共に p^* に始まり f_2 を被覆する道であるから，これらは一致しなければならない．故に，道 f_2^* は g_2^* の終点 $f_1^*(1)$ に終る．

これで，C)が示された．

C)から容易に導かれることとして，集合 $\omega^{-1}(x), x\in R$, の濃度は，群 $\pi_1(R, p)$ における部分群 $\rho(\omega, p^*), p^*\in\omega^{-1}(p)$，の指数[1] に等しく，従ってまた点 x に依存しない．$\omega^{-1}(x)$の濃度のことを，ω の**被覆の度数**という．

定理 77. 二つの弧状連結空間 R_1^* および R_2^* から弧状連結，局所連結な空間 R の上への被覆写像をそれぞれ ω_1 および ω_2 とし，$p\in R$, $p_1^*\in\omega_1^{-1}(p)$, $p_2^*\in\omega_2^{-1}(p)$で，$\rho(\omega_1, p_1^*)\subset\rho(\omega_2, p_2^*)$ と仮定する．このとき，R_1^* から R_2^* の上への適当な被覆写像 ω が存在して，$\omega_2\omega=\omega_1$ が成立つ．もし，$\rho(\omega_1, p_1^*)=\rho(\omega_2, p_2^*)$ならば，$\omega$ は同相写像を与える．この結果として特に，被覆 ω_1, ω_2 が同値であるための必要十分条件は，$\sigma(\omega_1)=\sigma(\omega_2)$なることである．

証明. R_1^* の任意の点を x_1^* として，p_1^* から x_1^* に到る任意の道を f_1^* とする．さらに，$f=\omega_1f_1^*$ とし，p_2^* から出て f を被覆する道を f_2^*, f_2^* の終点を x_2^* で表わす．

C)により，関係 $\rho(\omega_1, p_1^*)\subset\rho(\omega_2, p_2^*)$から，点 x_2^* は点 x_1^* によって一意的に定まることが知られる．言いかえれば，p_1^* から x_1^* に到る道 f_1^* の選び方如何に拘らず x_2^* は一つに定まるから，$\omega(x_1^*)=x_2^*$ とおいてよい．そうすると，$\omega_2\omega=\omega_1$．後のために，$\rho(\omega_1, p_1^*)=\rho(\omega_2, p_2^*)$ である場合には，ω は1対1対応を与えることを指摘しておく．

ω が被覆写像であることの証明に移る．$x_1^*\in R_1^*, x_2^*=\omega(x_1^*), x=\omega_2(x_2^*)$として，点 x の連結近傍であって，ω_1, ω_2 の両方により正則に被覆されるものを U で表わす．U を正則に被覆し，点 x_i^* を含む，空間 R_i^* の開集合を $V_i(x_i^*)$，

訳註 1) 剰余類の空間 $\pi_1(R, p)/\rho(\omega, p^*)$ の濃度．

$i=1,2$, とする．このとき，$\omega(V_1(x_1^*))=V_2(x_2^*)=V_2(\omega(x_1^*))$で，$\omega$は開集合$V_1(x_1^*)$から$V_2(x_2^*)$の上への同相写像であることを証明しよう．道$f_1^*, f, f_2^*$は上に述べたのと同じに取ってあるとする．$y_1^*\in V_1(x_1^*)$として，$x_1^*$から$y_1^*$に到る$V_1(x_1^*)$内の道を$g_1^*$とする．$\omega_1(g_1^*)=g$とおき，$x_2^*$から出て$g$を被覆する道を$g_2^*$とする．明らかに，$g_2^*$は開集合$V_2(x_2^*)$内の道である．さらに，道$f_2^*g_2^*$は道$fg$を被覆するものであるから，$\omega(y_1^*)\in V_2(x_2^*)$．従って，$\omega(V_1(x_1^*))\subset V_2(x_2^*)$となり，$V_1(x_1^*)$から$V_2(x_2^*)$の中への写像$\omega$は，$\omega=\omega_2^{-1}\omega_1$によって与えられ，ここに$\omega_2^{-1}$は$U$から$V_2(x_2^*)$の上へ完全に定義された写像である．この$\omega=\omega_2^{-1}\omega_1$なる関係の結果として，$\omega$は$V_1(x_1^*)$から$V_2(x_2^*)$の上への同相写像となる．次に，$x_2^*$は$R_2^*$内に任意に選んだ点であると考える．完全原像$\omega^{-1}(V_2(x_2^*))$は，上に示したことにより，$V_1(x_1^*), x_1^*\in\omega^{-1}(x_2^*)$，の全体の和集合である．これで，$\omega$は空間$R_1^*$から$R_2^*$の上への被覆写像となった．

$\rho(\omega_1, p_1^*)=\rho(\omega_2, p_2^*)$のときには，$\omega$は1対1対応であり，かつ被覆写像でもあるから，同相写像である．

これで定理77の証明は終る．

定理77は被覆の一意性に関する問題に答えるものであるが，次の定理78はその存在に関する問題への解答である．

定理 78. Rは弧状連結，局所連結，局所単連結な空間，$p\in R$として，群$\pi_1(R,p)$の任意に与えられた部分群をρとする．このとき，適当な弧状連結空間R^*によるRの被覆ωが存在して，$\rho(R^*, p^*)=\rho$, $p^*\in\omega^{-1}(p)$，である．

証明. 先ず，空間R^*の構成から始める．pから出る二つの道f, gが終点を共有して$\{fg^{-1}\}\in\rho$であるとき，f, gは**部分群ρに関して同値**であるとよぶことにする．直ちに確かめられるように，この同値関係は反射的，対称的，かつ推移的であるから，pを始点とするすべての道の集合は，互に同値な道のなす類に分解する．これらの類のおのおののことを**道の類**とよぶことにしよう．すべての道の類のなす集合をR^*と定義する．各々の道の類x^*に対して，それに属する道の終点$x=\omega(x^*)\in R$を対応させることにより，集合R^*から空間Rの

中への写像 ω が得られる．仮定により R は弧状連結空間であるから，$\omega(R^*)=R$ である．

集合 R^* に，近傍系による位相を導入する．R の近傍のうち，弧状連結であって，その中にとった任意の閉じた道が R においてホモトープ0であるものだけをすべて集めて得られる近傍系を Σ で表わす．空間 R が局所連結かつ局所単連結であることから，Σ は R の完全近傍系になっている(§49, D)参照)．Σ に属する任意の近傍を U として，道の類 x^* は $\omega(x^*)=x\in U$ をみたすものとする．R^* の部分集合 $U^*=\{U, x^*\}$ を次のように定義する．$f\in x^*$ とし，x を始点，$y\in U$ を終点とする U 内の任意の道を g とする．fg を含む道の類を y^* として，このような y^* すべての集まりを U^* と取る．写像 ω は U^* から U の上への1対1対応を与えることを証明する．すなわち，y^* は点 $y\in U$ と道の類 x^* によって一意的に定まり，道 f および g の選び方如何には関係しない．実際に，別に勝手な道 $f'\in x^*$ と，x から y に到る U 内の道 g' を選ぶと，$f'g'(fg)^{-1}=f'g'g^{-1}f^{-1}$. $g'g^{-1}$ は U 内の閉じた道であるから R においてホモトープ0であり，従って $f'g'(fg)^{-1}$ は $f'f^{-1}$ にホモトープである．ところが仮定により，$\{f'f^{-1}\}\in\rho$. さて，簡単にわかることとして，

$$\omega(U^*)=U, \tag{4}$$

$$y^*\in\{U, x^*\} \text{ ならば，} \{U, y^*\}=\{U, x^*\}. \tag{5}$$

$\{U, x^*\}$ なる形の集合の全体を Σ^* で表わして，系 Σ^* が定理3の条件を満足すること，すなわち空間 R^* の完全近傍系として Σ^* を取ってよいことを次に示そう．

x^*, y^* を R^* の相異なる2点とする．もし $\omega(x^*)\neq\omega(y^*)$ ならば，近傍系 Σ には互に交わらない，それぞれ $\omega(x^*)$, $\omega(y^*)$ の近傍 U, V が存在する．$U^*=\{U, x^*\}$, $V^*=\{V, y^*\}$ とおく．ω によるそれらの像 $\omega(U^*)=U, \omega(V^*)=V$ が互に交わらないのであるから，U^*, V^* も交わらない．次に，$\omega(x^*)=\omega(y^*)=x$ のとき，Σ に属する x の任意の近傍を U として，$U^*=\{U, x^*\}$, $V^*=\{U, y^*\}$ とおく．いま，二つの集合 U^*, V^* が元 z^* を共有したと仮定しよう．すると，$U^*=\{U, z^*\}$, $V^*=\{U, z^*\}$ である．写像 ω は集合 $U^*=V^*$ の上だ

けで考えれば1対1対応を与えるから，$\omega(x^*) = \omega(y^*)$ と $x^*, y^* \in U^*$ とから $x^* = y^*$ が出て，仮定に反する．従って，U^* と V^* とは相交わらない．第2の条件の満足を示すために，R^* の任意の点を x^* とする．Σ^* に属する集合で x^* を含むものはすべて $\{U, x^*\}, \omega(x^*) \in U, U \in \Sigma$, の形をとるから，点 x^* の任意の二つの近傍は $\{U, x^*\}, \{V, x^*\}$ と書くことができる．U, V は空間 R における点 $\omega(x^*)$ の近傍であるから，それらの共通部分に含まれる近傍 $W \in \Sigma$ が存在する．集合 $\{W, x^*\} \in \Sigma^*$ は点 x^* を含み，$\{U, x^*\}, \{V, x^*\}$ の共通部分に含まれる．このようにして，近傍系 Σ^* により空間 R^* に位相を導入できることが証明された．

ω が空間 R^* から R の上への被覆写像になっていることは，もはや簡単に示すことができる．実際，$x \in R$ として，x を含み Σ に属する任意の近傍を U とすると，集合 $\omega^{-1}(U)$ は互に交わらない R^* の開集合 $\{U, x^*\}, x^* \in \omega^{-1}(x)$，の和に分かれ，そのおのおのは ω により U の上へ位相的に写像される．

空間 R^* の点 p^* としては R の単位の道を含む道の類をとり，次に R^* が弧状連結であることと，$\rho(\omega, p^*) = \rho$ であることとを示そう．p を始点とする任意の道を f とし，$f_s(t) = f(st)$ とおけば，f_s も道であって，しかも径数 s に連続的に依存する．f_s を含む道の類を $f^*(s)$ と書いて，これにより空間 R^* に p^* を始点とし f を被覆する道 f^* が定義されることを証明する．先ず明らかに，$\omega f^*(t) = f(t), f^*(0) = p^*$．だから後は，$f^*(s)$ が R^* の点を値として取る s の連続函数であることを示せばよい．径数 s を任意の特定な値 s_0 に固定し，点 $f(s_0)$ の一つの近傍を U として，$U^* = \{U, f^*(s_0)\}$ とおく．ε は十分小さい正数で，$|s - s_0| < \varepsilon$ のとき $f(s) \in U$ なるものとする．直ちに知れるように，t の値が s_0 から s まで動くときに点 $f(t)$ の描く道を，道 f_{s_0} の右側に乗じて得られる道は，道 f_s, $|s - s_0| < \varepsilon$, に同値である．すなわち，$|s - s_0| < \varepsilon$ ならば $f^*(s) \in U^*$ が得られ，s の函数 $f^*(s)$ の連続性が示された．R^* の弧状連結性の証明に移る．R^* の任意の点を x^*，道の類 x^* に属する任意の一つの道を f とする．f から上記の方法で f^* を作れば，R^* の道 f^* は p^* から x^* に到る．従って，R^* は弧状連結空間である．$\rho(\omega, p^*) = \rho$ を証明するためには，f を被覆する道 f^* が閉じているための必要十分条件は，f が閉じていて $\{f\} \in \rho$ であることを示せば十

分である(C)参照). ところが f^* の作り方から，道 f は道の類 $f^*(1)$ に含まれるので，$f^*(1)$ が単位の道を含むための必要十分条件は，f が閉じていて $\{f\}\in\rho$ をみたすことである.

これで，定理 78 の証明が完成した.

D) 弧状連結空間 $\tilde{R}$ から弧状連結空間 R の上への被覆写像 $\tilde{\omega}$ は，$\tilde{R}$ が単連結であるとき，**普遍被覆**といい，$\tilde{R}$ のことを R の**普遍被覆空間**という. 定理 77 の結果として，空間 R がさらに局所連結であるとき，他の弧状連結空間 R^* から R の上への被覆写像 ω^* があれば，$\tilde{R}$ から R^* の上への被覆写像 ω が存在して $\omega^*\omega=\tilde{\omega}$ である. 普遍被覆という言葉を用いるのは，この性質による. また定理 77 からは，普遍被覆の一意性も出る. 定理 78 によれば，任意の弧状連結，局所連結，局所単連結空間 R に対して，その普遍被覆が存在する.

次に述べることは，被覆の群論における例として興味深いものである.

E) G は弧状連結位相群，D はそのディスクリート部分群，$M=G/D$ は(考えをきめるため，右側)剰余類のつくる空間であるとする. G から M の上への自然な写像 ω が，空間 M の空間 G による被覆を与えることは，簡単に確かめられる. このとき，群 $\pi_1(M,\omega(e))$ の部分群 $\rho(\omega,e)$ はその中心正規部分群であり，$\pi_1(M,\omega(e))$ のこの正規部分群による剰余群は群 D に同型である. その結果として，もし空間 G が単連結ならば，空間 M の基本群は D に同型である. 一般の場合に群 $\pi_1(M,\omega(e))$ がどのようなものであるかは，次に E) を証明しながら，こまかに述べることにする.

E)の証明. e から一つの元 $d\in D$ に到る道のうち，互にホモトープなものすべての集まりを，**道の類**とよぶことにする. 道 f,g をそれぞれに含む二つの道の類 $\{f\},\{g\}$ の積を，$\{f\}\{g\}=\{f(f(1)g)\}$ と定義する. ただし，$f(1)g$ は，t が 0 から 1 まで動くとき点 $f(1)g(t)$ の描く道を表わす. 各道の類 $\{f\}$ に，$\pi_1(M,\omega(e))$ の元 $\hat{\omega}(\{f\})=\{\omega f\}$ を対応させる. ここに，ωf は M の閉じた道であるから，$\{\omega f\}$ は確かに $\pi_1(M,\omega(e))$ の元である. このようにして，すべての道の類の集合 P から群 $\pi_1(M,\omega(e))$ の中への写像 $\hat{\omega}$ が得られるが，これは上への 1 対 1 写像である. 何故ならば，$\omega(e)$ を始点とする M の任意の閉じた

道をf'とし，eから出てそれを被覆する道をfとすると$f(1)\in D$. 故に$\{f\}\in P$で，$\hat{\omega}(\{f\})=\{\omega(f)\}=\{f'\}$. また，もし$\{f'\}=\{g'\}$であるならば，それぞれを被覆する道$f$および$g$は同一の道の類に属する．次に，写像$\hat{\omega}$は，二つの道の類の積を，$\pi_1(M, \omega(e))$の対応する元の積に写す．実際，

$$\hat{\omega}(\{f\}\{g\}) = \{\omega(f(f(1)g))\} = \{\omega f\}\{\omega g\} = \hat{\omega}(\{f\})\hat{\omega}(\{g\}).$$

従って，道の類の集合Pは上に導入した乗法により群となり，$\hat{\omega}$はこの群から群$\pi_1(M, \omega(e))$の上への同型写像を与える．

すべての道の類の集合Pのうち，閉じた道からなる道の類の全体は部分群$N=\pi_1(G, e)$を作っている．Nが中心不変部分群であることを証明しよう．eを始点とするGの任意の閉じた道をf, eからDの或る元に到る勝手な道をgとすると，$\{g\}\{f\}\{g\}^{-1}=\{g(g(1)f)g^{-1}\}$. ところが，§49の(8)により，

$$g(g(1)f)\sim fg$$

であるから，$\{g\}\{f\}\{g\}^{-1}=\{f\}$. 従って，$N$は群$P$の中心に属する．

これでE)の証明は終る．

例 86. ***n*次元のトーラス**に対して，普遍被覆を作り，基本群を定めよう．Rをn次元ベクトル群とし，空間Rに基底$e_1, \cdots, e_n$をとる．$e_1, \cdots, e_n$の整係数1次結合全体の作るRのディスクリート部分群をDで表わす．群Rから剰余群$R/D=T^n$への自然な準同型写像をωとする．空間T^nは，$n\geqq 2$のときn次元トーラスに同位相であり，$n=1$のときは円周を表わしている．写像ωは普遍被覆を与える．$f_i^*(t)=te_i$, $0\leqq t\leqq 1$, とおけば，$\omega f_i^*=f_i$は空間T^nにおける閉じた道になる．E)によれば，空間T^nの基本群$\pi_1(T^n, 0)$の元$\{f_1\}, \cdots, \{f_n\}$はその1次独立な生成元の完全系をなし，従って群$\pi_1(T^n, 0)$は階数nの自由可換群である．群T^1のことをKと書く．群$\pi_1(K, 0)$の生成元は$\{f\}$であり，ただし$f(t)$は，tが0から1までの値をとる間に，点0から円周Kを正の向きに沿って一様に動き，再び点0に到る．

例 87. **レムニスケート** (*lemniscate*) に対して，普遍被覆を作り，基本群を定めよう．群K (例86参照) をr箇取ってきて，番号を附し$K_1, \cdots, K_r$とする．群K_iの0元を0_iで，$\dfrac{1}{2}$をq_iで表わす[1]．すべての$K_1, \cdots, K_r$において点0_i

を同一の点 p に貼り合わせる．円周の集まり $K_1, \cdots, K_r$ に，この貼り合わせによる 0_i の同一視を行なった結果として得られる連結複体を L で表わす．複体 L は，$r=1$ のときは円周，$r=2$ のときレムニスケートである．円周 K_i の基本群の生成元を与える道を f_i，生成元自身は a_i で表わす．f_i は L では p を始点とする閉じた道であるから，a_i を群 $\pi_1(L, p)$ の元と考えておいてよい．$\pi_1(L, p)$ は独立な生成元 $a_1, \cdots, a_r$ による自由 ($r>1$ のときは非可換) 群になる．このことをいま証明しようとするのであるが，主張の正確な内容を先ず述べる．

n を負でない任意の整数とし，$\alpha(i)$ は整数 $i=1, 2, \cdots, n$ を変数とする函数で，取り得る値は $1, 2, \cdots, r$ のいずれかであり，i の相隣る値に対しては同じ値を取らないものとする．また $\beta(i)$ は同じ変数の函数で，取り得る値は 0 を除いた任意の整数とする．

$$c = (a_{\alpha(1)})^{\beta(1)}(a_{\alpha(2)})^{\beta(2)}\cdots(a_{\alpha(n)})^{\beta(n)} \qquad (6)$$

とおき，この表現を，文字 $a_1, \cdots, a_r$ に関する**語**と名づける．$n=0$ のとき，語 c は文字 $a_1, \cdots, a_r$ のいずれをも含まない．これを**単位の語**とよんで，記号 1 で表わすことにする．そうすると，$\pi_1(L, p)$ の任意の元は，かならず (6) の形に，しかもただ一通りに書表わすことができる．$\pi_1(L, p)$ が独立な生成元 $a_1, \cdots, a_r$ をもつ**自由群**であるとは，このことをいうのである．

始めに，$\pi_1(L, p)$ の任意の元が (6) の形に書けることを示す．実数線分 : $0 \leqq t \leqq 1$ を I とすると，L に与えられた，p を始点とする閉じた道 g は，線分 I から L の中への連続写像で，両端を p に写すものに他ならない．集合 $K_i \setminus p = U_i$ は L における開集合で，従って $g^{-1}(U_i) = V_i$ は I の両端を含まない I の開集合である．線分上の開集合 V_i は，可算箇あるいは有限箇の，互に交わることのない開区間 $J_{i1}, J_{i2}, \cdots$ の和に分かれる．これら J_{ij} のうち，集合 $g^{-1}(q_i)$ と交わるものは有限箇しか存在しない．何故ならば，$g^{-1}(q_i)$ はコンパクトな集合であり，従って区間 $J_{ij}, j=1, 2, \cdots$ による $g^{-1}(q_i)$ の可算被覆からは有限被覆を選び出せるからである．$g^{-1}(q_i)$ と交わらない J_{ij} だけを全部合併した集合を J_i

---

訳註 1)　$\frac{1}{2}$ とは K を実数の加法群 D の整数の加法群 N による剰余群とするとき実数 $\frac{1}{2}$ の剰余類のことである．これは群 K の唯一の位数 2 の元である．§36 A) 参照．

と記す．そして，$t \in J_i$ に対する点 $g(t)$ のおのおのを，K_i 上 p に到る二つの弧のうち小さい方に沿って，一様に p まで移動させる．この変形によって，写像 g はそれにホモトープな新しい写像に変るが，後者を改めて g としてとれば，これから上の手続きで作った開区間 J_{ij} はもはや有限箇しかない．写像 g の定義範囲を線分 $\bar{J}_{ij}$ の上に限定して考えると，これにより群 $\pi_1(K_i, p)$ の一つの元が定義され，この元は a_i の累乗で表わせる．こうして，$\pi_1(L, p)$ の任意の元は，(6)の形に書けることになる．

$\pi_1(L, p)$ の各元を語として(6)の形に書く表わし方が一意的であることを証明するために，1次元複体 L の普遍被覆 $\tilde{\omega}$ を次に構成するが，この目的を別にしても，$\tilde{\omega}$ はそれ自体十分興味のあるものである．複体 L のすべての q_i, $i = 1, \cdots, r$, において鋏を入れて各 q_i を $q_i(+1)$ と $q_i(-1)$ の2点に分ける．この中 $q_i(+1)$ は，p から K_i を正の向きに沿って達することのできる方の点であると約束する．L にこのように鋏を入れた複体を L' で表わし，L' から L の上への自然な写像を ω' と書く．ω' は $q_i(\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1, i = 1, 2, \cdots, r$, を除いたあらゆる点において，局所的同相写像を与え，点 $q_i(-1), q_i(+1)$ は共に，ω' により q_i に写像される．さて，各語 c((6) 参照) に複体 L' を一つずつ対応させて，区別のためそれぞれを L_c と書く．ω' を L_c に適用して得られる L の上への自然な写像を ω_c と書く．複体 L_c における点 $q_i(\varepsilon)$ を $q_{ic}(\varepsilon), p$ を p_c で表わすことにする．次に，c は(6)で与えられる語，a_i は生成元 $a_1, \cdots, a_r$ のうちの任意の一つ，$\varepsilon = \pm 1$ とする．そこで場合を二つに分け，先ず $i = \alpha(n)$ のときは，ε に $\beta(n)$ と同じ符号をとらせて，

$$d = d(c, \varepsilon) = (a_{\alpha(1)})^{\beta(1)} \cdots (a_{\alpha(n)})^{\beta(n)+\varepsilon} \qquad (7)$$

と置き，次に $i \neq \alpha(n)$ のときは，ε の符号は任意として，

$$d = d(c, \varepsilon) = (a_{\alpha(1)})^{\beta(1)} \cdots (a_{\alpha(n)})^{\beta(n)} a_i^{\varepsilon} \qquad (8)$$

と置く．(7)あるいは(8)により与えられる語 d のことを，語 c の**延長**とよぶ．明らかに，任意の語は，単位の語から出発して，延長をひき続き行なうことによって得られ，しかもこの延長の仕方は，構成しようとする語により一意的に定まる．d が語 c の延長であるとき((7), (8)参照)，複体 L_c の点 $q_{ic}(\varepsilon)$ と L_d

の点 $q_{ia}(-\varepsilon)$ とを貼り合わせて1点と見なす．このような点の間の同一視をすべてにわたって行なうと，複体 L_c の集まりから一つの複体 $\tilde{L}$ が得られる．先ず，$\tilde{L}$ は連結複体である．何故ならば，任意の語は単位の語を引き続き延長して得られ，従って単位の語に対応する複体 L_1 から出発すれば，任意の語 c に対応する複体 L_c に連続的道程を経て到達することができるから．また，ω_c を $\tilde{L}$ にそのまま適用して得られる写像 $\tilde{\omega}$ は，明らかに被覆写像である．(6)で与えられる語 c に，次のような L の道 f_c を対応させる．すなわち，f_c は p を始点として，円周 $K_{\alpha(1)}$ を $\beta(1)$ 回まわり，次に $K_{\alpha(2)}$ を $\beta(2)$ 回まわる．以下同様にして，終りに $K_{\alpha(n)}$ を $\beta(n)$ 回まわる．p_1 を始点としてこの f_c を被覆する道を $\tilde{f}_c$ とすれば，$\tilde{f}_c$ の終点は明らかに p_c である．このことからして，相異なる語は群 $\pi_1(L, p)$ の相異なる元を定義し，また $\pi_1(\tilde{L}, p_1)$ は単位元のみから成り，従って $\tilde{\omega}$ は普遍被覆写像を与える．

例 88. **広義の射影平面**につき，普遍被覆を作り，基本群を定めよう．E は半径1の円板，K はその周を表わすものとする．E に対し中心 O を極，K 上の定点 p に到る半径を原線とする極座標を導入する．E の任意の点 x は，ρ を動径，ϑ を偏角として，$x=(\rho, \vartheta)$ と書表わされる．自然数 $n \geqq 2$ に対して空間 P_n を次の如く定義する．E において，その周上の各点 $(1, \vartheta)$ を点 $\left(1, \vartheta+\dfrac{2\pi}{n}\right)$ と同一視し，その結果として得られる空間を P_n で表わす (P_2 の空間は**射影平面**に同相である)．E から P_n の上への自然な写像を φ で表わす．点 $(1, \vartheta)$，$0 \leqq \vartheta \leqq \dfrac{2\pi}{n}$，から成る円弧 $I \subset K$ は，写像 φ により，P_n における円周 K' に移る．また，全円周 K は φ により，K' の上に n 重に重なり，従って φ は，K による K' の，被覆度数 n の被覆写像を与える．容易に検証されることとして，群 $\pi_1(K', p')$, $p'=\varphi(p)$，の生成元 a は，群 $\pi_1(P_n, p')$ においても生成元を与え，さらに $a^n=1$ である．そこで，$\pi_1(P_n, p')$ が実際に位数 n の巡回群であることを証明するために，P_n の普遍被覆空間 $\tilde{P}_n$ を次に作る．円板 E を n 箇とってきて番号を附し，$E_1, \cdots, E_n$ で表わす．$E_1, \cdots, E_n$ の周をすべて貼り合わせる．すなわち，E_i の点 $(1, \vartheta)$ と E_j の点 $(1, \vartheta)$ $(i, j=1, \cdots, n)$ とをすべて同一視することにより，この n 箇の円板から得られる空間を $\tilde{P}_n$ とする．まず，$\tilde{P}_n$ が単連

結空間であることは容易に知られよう．任意の点 $x\in\tilde{P}_n$ は，所属する円板 E_i の番号 i と，E_i における x の座標 ρ, ϑ を指定することにより完全に定まるから，$x=(\rho, \vartheta, i)$ と書いてよい．そこで，$\tilde{\varpi}(\rho, \vartheta, i) = \left(\rho, \vartheta + \dfrac{2\pi i}{n}\right)\in P_n$ とおけば，$\tilde{P}_n$ から P_n の上への写像 $\tilde{\varpi}$ を得るが，これで連続写像 $\tilde{\varpi}$ が正しく定義されており，しかもそれが被覆を与えていることも容易に確かめられる．普遍被覆 $\tilde{\varpi}$ の被覆度数が n であることから，$\pi_1(P_n)$ は位数 n であることを知る．

§51. 被覆群

この§ではまず，位相群を被覆する弧状連結空間が，自然にまた位相群になることを示す．特にその被覆が普遍被覆である場合には，**普遍被覆群**が得られる．定理80からは，この普遍被覆群の一意性が導かれる．定理80はまた，単連結群から他の群への局所準同型写像が，群全体の準同型写像に拡張できることを保証する．一般に，単連結でない群において，局所準同型写像の定義域を群全体に拡張して準同型写像を得ようとしても，1価でない写像になってしまうのが普通であるので，上記の結果は一意化定理の性格をもつものと言える．

定理 79. 弧状連結空間 G^* から，弧状連結，局所連結な位相群 G の上へ，被覆写像 ω が与えられているとする．このとき，G^* の点の間に乗法を定義して空間 G^* が位相群となり，かつ ω が群 G^* から G の上への準同型写像を与えるようにすることができる．明らかに，ω は開準同型写像になり，その核はディスクリートな集合である．

証明. 集合 $\omega^{-1}(e)$ から任意の元 e^* を選んで，これが群の単位元になるように G^* の乗法を定義しよう．a^* および b^* を G^* の任意の2元として，e^* からそれに到る道をそれぞれ f^* および g^* とする．$a=\omega(a^*)$, $b=\omega(b^*)$, $f=\omega f^*$, $g=\omega g^*$ とおく．$h=f(ag)$ なる道を作って，それを被覆し e^* を始点とする道を h^* と書く．h^* の終点を c^* として，この c^* が2点 a^*, b^* のみに依存し，それらに到る道 f^*, g^* の選び方如何に関係なく定まることをまず証明しよう．f^*, g^* の代りに，それぞれ両端を同じくする他の勝手な道 $f_1{}^*, g_1{}^*$ を選んだとして，$f_1=\omega f_1{}^*, g_1=\omega g_1{}^*$ とおく．e^* を始点とし $h_1=f_1(ag_1)$ を被覆する道を $h_1{}^*$ と

する．§50, C)により，h^*, h_1^* の終点が一致することを証明するためには，$\{h_1h^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*)$ であることを，$\{f_1f^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*)$，$\{g_1g^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*)$ の仮定のもとに示せば十分である．ところが，

$$h_1h^{-1} = f_1(ag_1)(ag^{-1})f^{-1} = f_1(a(g_1g^{-1}))f^{-1}\sim(g_1g^{-1})(f_1f^{-1})$$

であり(§49, (8))，従って，

$$\{h_1h^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*).$$

かくて，元 c^* は2元 a^*, b^* により一意的に定まるから，これを a^*, b^* の積と定義して，

$$c^* = a^*b^*$$

と書く．直ちに確かめられることとして，

$$\omega(a^*b^*) = \omega(a^*)\omega(b^*). \qquad (1)$$

このように定義した乗法が結合律をみたすことは，道の間の乗法における結合律(§49, (3))から出る．e^* は単位元の条件をみたしている．そして，任意の a^* に対する逆元は，$a^{-1}f^{-1}$ を被覆する道の終点として定義される．(1)は，ω が準同型写像であることを示している．

次に，空間 G^* にこうして導入された乗法が，連続であることを証明する．そのためにまず，f^*, g^* を G^* の勝手な二つの道とするとき，$f^*(t)(g^*(t))^{-1}$ なる点は変数 t の函数として連続であること，言いかえれば，空間 G^* の中に一つの道を描くことを示す．その証明は，f^*, g^* が共に e^* を始点とする道である場合にのみ行なうが，これは何ら本質的な制限とはならない．何故ならば，G^* の任意の道は，e^* から始まる道の一部と考えてよいからである．

$$f = \omega f^*,\quad g = \omega g^*,\quad f_s(t) = f(st),\quad g_s(t) = g(st)$$

とおき，$h_s = f_s(f(s)(g(s))^{-1}g_s^{-1})$ により G の道 h_s を作る．すると，考える点 $f^*(s)(g^*(s))^{-1}$ は，G^* における乗法の定義から，h_s を被覆する道 h_s^* の終点として与えられる．h_s の定義式から，道 h_s は径数 s に連続的に依存し，従って，それを被覆する道 h_s^* もまた s に連続的に依存する(§50, B)参照)．特に，その終点 $f^*(s)(g^*(s))^{-1}$ は s の連続函数になる．さて，a^*, b^* は G^* の任意の2点，$c^* = a^*(b^*)^{-1}, a = \omega(a^*), b = \omega(b^*), c = \omega(c^*)$ として，W^* は G^* における点

c^* の近傍で，点 c の或る近傍 W を正則に被覆するものとする．また，U, V は，弧状連結でかつ正則に被覆された，それぞれ点 a, b の近傍で，$UV^{-1}\subset W$ をみたすものとする．さらに，U, V を正則に被覆する G^* の開集合で，点 a^*, b^* の近傍になっているものを，それぞれ U^*, V^* で表わす．このとき，$U^*(V^*)^{-1}\subset W^*$ であることを示す．そのために，$x^*\in U^*, y^*\in V^*$ として，それぞれ点 a^*, b^* から点 x^*, y^* に到る U^*, V^* 内の道を f^*, g^* に取る．

$$\omega(f^*(s)(g^*(s))^{-1}) = \omega f^*(s)(\omega g^*(s))^{-1}\in UV^{-1}\subset W$$

と $f^*(0)(g^*(0))^{-1}\subset W^*$ とから，§50, A)により，$f^*(s)(g^*(s))^{-1}\in W^*$．特に，$x^*(y^*)^{-1} = f^*(1)(g^*(1))^{-1}\in W^*$ であり，群 G^* における乗法の連続性が得られた．

これで，定理79の証明が終った．

次の定理は，極めて重要なものである．普遍被覆群の一意性もこれから出る．

定理 80. G', G は二つの弧状連結な位相群で，G はさらに単連結，局所連結であるとする．G から G' へ一つの局所準同型写像 f が与えられるとき（§23, K)参照)，この f を，群 G 全体から群 G' への準同型写像 φ に拡張することができ，しかも拡張 φ は f により唯一通りに定まる．ここに，φ が f の拡張であるとは，f と φ とが，G の或る単位元の近傍 W において一致することをいう．f が上への局所準同型写像であるときには，φ も G から群 G' 全体の上への準同型写像となり，f が開写像であるときには，φ も開準同型写像となる．また，G' も単連結かつ局所連結であって，f が局所同型を与えるならば，φ は同型写像となる．

証明. 位相を考えない抽象群 G から抽象群 G' への準同型写像であって，局所準同型写像 f の拡張になっているような φ が見つかれば，その φ は自然に位相群 G から位相群 G' への準同型写像となっている．何故ならば，二つの写像 f, φ は単位元の近傍 W において一致し，f は連続写像であるから，φ は G 全体で連続な準同型写像となる（§20, A)参照)．次に，f が上への局所準同型写像であるならば，その拡張 φ は，G から全群 G' の上への準同型写像になっている．何故ならば，この場合 $f(W)$ は G' の或る単位元の近傍を含み，一方で連結群 G' はその任意の単位元の近傍から生成されるから(定理14参照)，任意

の元 $x'\in G'$ は $x'=\varphi(x)$ の形に表わすことができる．また，もし f が開写像であるならば，拡張 φ も開準同型写像になる．何故ならば，この場合準同型写像 φ が単位元の近傍において開写像であるから，それはまた群全体における開写像である（§20, A）参照）．

局所準同型写像 f の拡張 φ が唯一通りしか存在しないことを示す．そのために，二つの拡張 φ および φ' が存在したと仮定する．G の任意の元を x とし，φ, φ' が共に f と一致する G の単位元の近傍を W とする．G は連結群であるから，定理 14 により，任意の元 x は $x=a_1\cdots a_n$, $a_i\in W$, $i=1,\cdots,n$, の形に表わすことができる．従って，

$$\varphi(x)=f(a_1)\cdots f(a_n),\quad \varphi'(x)=f(a_1)\cdots f(a_n)$$

が成立ち，

$$\varphi(x)=\varphi'(x)$$

を得る．

次に，準同型写像 φ を実際に組立ててみよう．

G の単位元 e を始点とする G 内の勝手な道を g とする．g に対して，これにより一意的に定まる G' 内の道 g' を，次の二つの条件 a), b) を満足するように作る．

a)　$g'(0)=e'$，ただし e' は群 G' の単位元．

b)　局所準同型写像 f の定義されている G の単位元の近傍を U とする．このとき，十分に小さい正数 ε が存在して，$|t_1-t_2|\leqq\varepsilon$ ならば，

$(g(t_1))^{-1}g(t_2)\in U$ であって，$(g'(t_1))^{-1}g'(t_2)=f((g(t_1))^{-1}g(t_2))$．

まず，もし g' の存在を仮定するならば，条件 a) および b) をみたす g' は唯一通りに限ることを証明する．g' の始点は a) により定められている．そこで，g' が $t<\tau$ なる t のすべての値に対して一意的に定められていると仮定すれば，函数 $g(t), g'(t)$ が共に連続であることから，$t=\tau$ に対しても g' は一意的に定まる．次に，函数 $g'(t)$ が $t=\tau$ において定まるならば，それは $t-\tau<\varepsilon$ をみたす t のすべての値に対しても一意的に定まる．何故ならば，b) により，$g'(t)=g'(\tau)f((g(\tau))^{-1}g(t))$ だからである．すなわち，道 g' は，t のすべての値に

対して，一通りに定まることが分った.

そこで g' が存在することの証明に移ろう. V は G の単位元の近傍であって，$V^{-1}V \subset U$ をみたすものとする. これに対して，自然数 n を十分に大きく取って，$|t_1 - t_2| \leqq \frac{1}{n}$ ならば $(g(t_1))^{-1}g(t_2) \in V$ であるようにする. $\varepsilon = \frac{1}{n}$ とおき，$t \leqq m\varepsilon$ なるすべての t に対しては，函数 $g'(t)$ が既に a) および b) を満たすように定義されていると仮定する. そして，この $m\varepsilon$ までの道を，更に先まで延長できることを証明しよう. h は ε を越えない正数として，

$$g'(m\varepsilon + h) = g'(m\varepsilon)f((g(m\varepsilon))^{-1}g(m\varepsilon + h)) \qquad (2)$$

とおいて，$m\varepsilon < t \leqq (m+1)\varepsilon$ に対する函数 $g'(t)$ の値を定義する. このようにして延長した函数 $g'(t)$ についても，条件 b) はやはり満たされることを示そう. h' の絶対値が ε を越えないとき，

$$g'(m\varepsilon + h') = g'(m\varepsilon)f((g(m\varepsilon))^{-1}g(m\varepsilon + h')). \qquad (3)$$

何故なら，h' が正のとき (3) は (2) から出るし，h' が負のときは，(3) は帰納法の仮定により正しい. (2) と (3) から，

$$(g'(m\varepsilon + h))^{-1}g'(m\varepsilon + h') = f((g(m\varepsilon + h))^{-1}g(m\varepsilon + h')).$$

従って，$t \leqq (m+1)\varepsilon$ につき $g'(t)$ は b) をみたす. $m = 0$ における帰納法の仮定を実現するには，$g'(0) = e'$ と取れば十分である. またこれにより，条件 a) は常にみたされる. これで帰納法は完了し，道 g' が構成された.

いま t_1, t_2 は，$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$，$t_2 - t_1 \leqq \varepsilon$ をみたす任意の二数とする. もし道 g が区間 $t_1 < t < t_2$ の t に対する点だけを動かすような連続変形をうけるならば，g に対応する道 g' もまた同じ区間内の t に対してのみ変形をうける. 何故ならば，上に述べた手続きで g' を作るのに，$t \leqq t_1$ に対しては，道 g の $t \leqq t_1$ に対する部分だけしか必要でない. また，$t = t_2$ に対する函数 $g'(t)$ の値は，b) により $g'(t_1)$ の値だけで定まる. g' をそれから先に延長するには，$g'(t_2)$ の値を用いるだけで十分である. g のこのような変形を，**微小変形**とよぶことにしよう. するといま示したことから，g の微小変形に対しては，対応する道 g' はその両端を変えない. ところで，道 g の両端を動かさない任意の変形は，微小変形をくり返し行なうことにより得られることは容易に証明できる. 従って，道 g にそ

の両端をたもつ任意の連続変形をほどこすとき，対応する道 g' もまた，その両端を変えぬ連続変形をうける.

さて，x を G の任意の点として，単位元 e から x に到る勝手な道を g にとる. g に対応する道 g' を作り，その終点を x' で表わす. このとき，x' は点 x により一意的に定まり，道 g の選び方に関係しないことを示そう. 実際に，e と x とを結ぶ他の道を h とすれば，G が単連結であることから，h, g は互にホモトープであり，従って，連続変形により g を h に移すことができる. この変形に応じて，g' も G' 内で連続変形をうけるが，上に示したことにより，その際 g' の両端は変化を蒙らない. すなわち，道 g および h は，同一の点 x' を定める. こうして，x' は x により定まるから，$x' = \varphi(x)$ とおいてよい.

この φ が f と一致するような G の単位元の近傍 $W \subset U$ が存在することを次に示す. W として，G の弧状連結な単位元の近傍で，$W^{-1}W \subset U$ をみたすものを取る. x を W の任意の点とし，e から x に到る W 内の道を g とする. $g' = fg$ とおけば，道 g' は条件 b) をみたしていることが容易にわかる. 実際に $g(t) \in W$ であるから $(g(t))^{-1} \in W^{-1} \subset U$, そして任意の t_1 および t_2 につき $(g(t_1))^{-1}g(t_2) \in W^{-1}W \subset U$, 従って，$f((g(t_1))^{-1}g(t_2)) = f((g(t_1))^{-1})f(g(t_2)) = (f(g(t_1)))^{-1} f(g(t_2)) = (g'(t_1))^{-1}g'(t_2)$. 故に，$\varphi$ の定義から g' の終点は $\varphi(x)$ であり，他方 $g'(1) = f(g(1)) = f(x)$. すなわち，$x \in W$ ならば，$\varphi(x) = f(x)$.

写像 φ が，抽象群 G から抽象群 G' への準同型写像になっていることを証明しよう.

G の任意の 2 点を a, b とし，e からそれぞれ a, b に到る道を g, h で表わす. g, h に対応する道およびその終点をそれぞれ g', h' および a', b' とする. 明らかに，道 $g(ah) = m$ は，e から出て点 ab に及ぶ. 同様に，道 $g'(a'h') = m'$ は，e' から出て $a'b'$ に及ぶ. また，m' が m に対応する道であることは，容易に確かめられる. 従って，写像 φ の定義から，$\varphi(ab) = a'b' = \varphi(a)\varphi(b)$. すなわち，$\varphi$ は準同型写像である.

あと残っているのは，G' が単連結，局所連結群で，f が局所同型写像という場合の考察だけである. この場合，単位元の近傍 U を十分小さくとると，逆写

像f^{-1}が存在して，f^{-1}はG'からGへの局所同型写像を与える．仮定により，今度はG'も単連結かつ局所連結であるから，これまで証明してきたことによって，局所同型写像f^{-1}を拡張して，G'からGの上への準同型開写像ψにすることができる．写像$\psi(\varphi(x))=\chi(x)$を考えると，これは群Gからそれ自身の上への準同型開写像になっている．Gの十分小さい単位元の近傍においては，写像$\chi(x)$は$f^{-1}(f(x))=x$なる写像と一致する．すなわち，χは，Gの局所恒等写像の拡張になっている．既に証明した拡張の一意性によって，χは群Gのそれ自身の上への恒等写像でなければならず，これは二つの写像φとψとが互に他の逆写像であることを意味する．従って，φは1価の逆写像をもつから，同型写像でなければならない．

これで，定理80の証明が完全に終った．

定理78, 79, 80によって，今や次のような定義をすることができる．

定義46. 位相群が弧状連結，局所連結かつ局所単連結であるとき(§49, D)参照)，これを**認容**位相群とよぶ．或る一つの群に局所同型な認容位相群の全体が成す類をΓで表わすならば，定理78, 79, 80により，類Γには，同型を除き唯一つの単連結群が存在する．この群を，Γに属するすべての群に対する**普遍被覆群**とよぶ．定理80の帰結として，Γの任意の群は，この類の普遍被覆群から，そのディスクリート正規部分群(従ってまた中心正規部分群でもある．定理15参照)に関する剰余群をつくることによって得られる．

次に掲げる二三の例は，重要な理論的意義をもっている．その中で，Euclid空間の回転群につき，基本群と中心とを計算する．§65(例108)では，同じ方法を用いて，**コンパクト典型リー群**の残りの2系列に対して，やはり基本群と中心との計算を行なう．

例89. 3次元および4次元Euclid空間の回転群H_3およびH_4を，4元数を用いて研究し，特に，$\pi_1(H_3)$および$\pi_1(H_4)$が共に位数2をもつことを証明する．

Kは4元数体(§26参照)，Dはそれに含まれている実数体，Jは純4元数の全体から成る部分空間，Gは絶対値1の4元数が作る乗法群をそれぞれ表わす

ものとする．多様体 G は3次元球面に同位相であり，従って単連結である（例85参照）．G に属する4元数 x, y の組のおのおのに対して，

$$\varphi_{x,y}(u) = xuy^{-1},\quad u\in K$$

とおいて，空間 K の1次変換 $\varphi_{x,y}$ を対応させる．$|xuy^{-1}| = |u|$ であるから，変換 $\varphi_{x,y}$ は，4次元 Euclid 空間 K の回転を与える．後に証明するように，各元 $(x, y)\in G\times G$ に回転 $\lambda(x, y) = \varphi_{x,y}$ を対応させることにより，群 $G\times G$ から4次元空間 K のすべての回転の作る群 H_4 の上への準同型写像 λ が得られる．そして，準同型写像 λ の核は2元 $(1, 1)$ および $(-1, -1)$ から成る．このことから，群 $G\times G$ が単連結であることを用いて（§49, F）参照），$\pi_1(H_4)$ の位数が2であることが判る．次に，$\psi_x = \varphi_{x,x}$ という形の変換を考えると，これは直線 D を不変にするから，従って D に直交する空間 J をそれ自身に写している．すなわち ψ_x は，3次元空間 J における一つの回転を表わす．$\mu(x) = \psi_x$ とおけば，群 G から3次元 Euclid 空間 J の全回転群 H_3 の上への準同型写像 μ が得られることと，μ の核は群 G の中心と一致し，2元1および -1 から成ることが証明される．このことから，群 H_3 の中心は単位元のみより成り，$\pi_1(H_3)$ の位数が2であることがわかる．最後に，

$$f(t) = \cos\pi t + k\sin\pi t,\quad 0\leqq t\leqq 1,$$

とおけば，空間 G の1から -1 に到る道 f が定義されるが，これを写像 μ により H_3 に写して得られる道 $g = \mu f$ は，閉じた道であって，

$$g(t) = \begin{Vmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

で与えられる．g は，位数2の群 $\pi_1(H_3)$ の生成元 $\{g\}$ を定めている．

まず，

$$\varphi_{x,y}\varphi_{x',y'} = \varphi_{xx',yy'}$$

が成立つから，λ は群 $G\times G$ から群 H_4 の中への準同型写像である．またこのことから，μ は群 G から H_3 の中への準同型写像である．μ が上への写像であること，すなわち $\mu(G) = H_3$ となることを次に示そう．$l = aj + bk$，ただし

$a^2+b^2=1$, とおく．直ちにわかることは，

$$l^2=-1,\ li=-il. \qquad (5)$$

そこで，$x=\cos\beta+l\sin\beta$ と取ると，(5)から，

$$\psi_x(i)=(\cos\beta+l\sin\beta)\,i(\cos\beta-l\sin\beta)=(\cos\beta+l\sin\beta)^2 i$$
$$=(\cos 2\beta+l\sin 2\beta)\,i=i\cos 2\beta+(bj-ak)\sin 2\beta. \qquad (6)$$

この関係から，a, b, β を適当に選べば，ψ_x なる写像によって，4元数 i を集合 $S^2=J\frown G$ に属する任意の4元数に写すことができることを知る．さらに，$a=0$, $b=1$ とおけば，(6)から，

$$\psi_x(i)=i\cos 2\beta+j\sin 2\beta \qquad (7)$$

を得，またこの場合の x は k と可換であることから，k 軸のまわりの空間 J の任意の回転は，この形の ψ_x により実現することができる．上の二つのことと，G が群であることとから，変換 ψ_x, $x\in G$, により，空間 J の任意の回転を実現することができる．すなわち，$\mu(G)=H_3$. 次に，K における乗法の定義から，4元数 i と可換な G の元は，$a+bi$ の形のものだけであり，同様に j と可換な G の元は，$a+bj$ の形のものだけである．従って，群 G の中心は，2元，1および -1 のみから成り，また準同型写像 μ の核もやはりこの2元から成る．(7)からは，(4)が出る．

終りに，φ を空間 K の任意の回転とする．$\varphi(1)=z$ とおき，$\varphi_{1,z^{-1}}{}^{-1}\varphi$ なる変換を考えると，これは直線 D 上の点を動かさないから，$\varphi_{x,x}$ の形に書くことができる．すなわち，

$$\varphi=\varphi_{1,z^{-1}}\varphi_{x,x}=\varphi_{x,z^{-1}x}$$

が成立ち，従って λ は群 H_4 の上への写像である．もし回転 $\varphi_{x,y}$ が恒等写像に等しければ，特にそれは軸 D 上の点を動かさず，従って $x=y$ でなければならない．そして更に，前に示したことにより，$x=\pm 1$. すなわち，準同型写像 λ の核は，2元 $(1, 1)$ および $(-1, -1)$ から成る．

例 90. G はリー群，H はその部分群，$M=G/H$ は(考えをきめるため右側)剰余類のつくる空間であるとする．G, H が共に連結群で，多様体 M が r 次元の球面に同位相，ただし $r>2$, であるならば，群 $\pi_1(G)$ と $\pi_1(H)$ とは互に同

型:

$$\pi_1(G) \cong \pi_1(H) \qquad (8)$$

であることを証明しよう.

この比較的特殊な結果は，後にすべてのコンパクト典型リー群の基本群を見出だす際に用いられる．これを示すために，次の補助定理を先に証明するが，この補助定理はまた，一般の場合に多様体 G, H, M の基本群の間の関係を定めるのに利用できるものである.

補助定理 φ は，リー群 G から，その (右側) 剰余類のつくる多様体 $M = G/H$ の上への自然な写像を表わし，g_t は，コンパクト空間 R を多様体 M の中へ写し，かつ t に関して連続的に変形する写像であるとする．さらに，f_0 は空間 R から多様体 G の中への連続写像であって，$\varphi f_0 = g_0$ をみたすものとする．このとき，t と共に連続的に変形する，空間 R から空間 G の中への写像 f_t が存在して，$\varphi f_t = g_t$, $0 \leqq t \leqq 1$, が成立つ．このような f_t を，変形 g_t に対する**被覆変形**とよぶ．変形 f_t は，さらに附加条件として，$g_t(x_0) = g_0(x_0)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $x_0 \in R$, ならば $f_t(x_0) = f_0(x_0)$, なる条件をみたしている.

証明. L は，H と e だけで交わる G 内の小さな面分で，φ により M の点 $p = \varphi(e)$ の或る近傍の上へ同位相に写像されるようなものとする(§44, A)参照)．そこで，自然数 n を十分に大きくとれば，$|t_1 - t_2| \leqq \dfrac{1}{n}$, $a \in \varphi^{-1}(g_{t_1}(x))$ なるとき，La なる小さな面分と剰余類 $g_{t_2}(x)$ とは，唯1点において交わる．いま，変形 f_t は既に，$0 \leqq t \leqq \dfrac{p}{n}$ をみたす t の値に対しては，定義されているものと仮定して，続いて $\dfrac{p}{n} \leqq t \leqq \dfrac{p+1}{n}$ なる値に対しても定義できることを示す．実際に，この区間の t に対する点 $f_t(x)$ としては面分 $Lf_{\frac{p}{n}}(x)$ と剰余類 $g_t(x)$ との交点を取っておけばよい．こうして作られた変形 f_t が求めるものであることの検証は容易であろう.

さて，(8)の証明に移る．証明に用いられる考察は，もっと一般的な結果を導く際にも適用できるものである.

g を，点 $p = \varphi(e)$ に始まる，M 内の任意の閉じた道とする．1点 c から成る空間 $R = \{c\}$ を考え，$g_t(c) = g(t)$ とおくと，道 g はまた，R から M への写像の連

続変形 g_t と見ることができる. 従って先の補助定理を適用することができて, G には, e を始点とし $\varphi f=g$ をみたす道 f が存在することになる. f の終点は H 内にあり, もし部分群 H が連結であるならば, 道 f を H の中で点 e まで延長することができる. こうして, e に始まる G の閉じた道で, $\varphi f\sim g$ をみたすものが得られた. このことは, G, H が共に連結群である場合, 準同型写像 $\hat{\varphi}$ が群 $\pi_1(M)$ 全体の上への写像であることを意味する. さらに, 再び補助定理によって, もし道 g が M においてホモトープ 0 であるならば, それを被覆する道 f は, 連続変形により, H 内の道に移すことができる. 従って, 準同型写像 $\hat{\varphi}$ の核は, G の閉じた道の類のうち, その代表を H 内にもつもの全体から成る[1)].

さて, f は e に始まる H 内の閉じた道で, G においてホモトープ 0 であるとする. f の閉じていることから, f を一つの円周 S^1 から H の中への連続写像と考えてよい. また f が G においてホモトープ 0 であることから, 写像 f の定義域を S^1 を周とする円 E^2 の上に拡張することができる. そうすると, φf は円 E^2 から多様体 M の中への連続写像となり, 周 S^1 を一点 p に写す. もしも多様体 M が 2 より大きな次元数をもつ球面であるならば, 容易に知れるように, E^2 の写像 φf を, 周 S^1 における値を変えない連続変形によって, 円全体を一点 p に写す写像に持ちきたらすことができる. この変形に対する被覆変形によって, f はやはり周 S^1 の像は変えずに, 円 E^2 から H の中への写像に移る. 従ってこの場合, 道 f は H 内でホモトープ 0 である. これで, (8)の証明が終った.

例 91. n 次元 Euclid 空間 $E^n, n\geqq 3$, のすべての回転から成る群を H_n とする. あるいは, H_n は正なる行列式をもつ n 次の直交行列全体のなす群, と言いかえてもよい. 空間 H_n の基本群は位数 2 をもつことが示され, 従って群 H_n は普遍被覆群 $\tilde{H}_n$ により度数 2 の被覆をうける. また, n が奇数の場合, H_n の中心は単位行列 e のみを含み, n が偶数の場合は, H_n の中心は $e, -e$ の二つの

訳註 1) 今の場合, M は $S^r, r>2$, に同位相で, $\pi_1(M)$ は単位元のみから成るから, $\hat{\varphi}$ の核は $\varphi^{-1}(\pi_1(M))=\pi_1(G)$ に一致する. すなわち上記のことから, $\pi_1(G)$ の元である道の類は, 必ず H 内の閉じた道を代表にもっていることがわかった. 次に, G においてホモトープ 0 なる H 内の閉道は, H においてもホモトープ 0 であることを示す. すると, $\pi_1(G)$ の元と $\pi_1(H)$ の元との間に 1 対 1 対応が確立し, $\pi_1(G)\cong\pi_1(H)$ の証明が終る.

行列から成る．このことから，n が奇数の場合，群 $\tilde{H}_n$ の中心は位数 2 の巡回群であり，n が偶数の場合には，$\tilde{H}_n$ の中心は位数 4 の群である．さらに詳しく言えば，n が 4 の倍数であるならば，$\tilde{H}_n$ の中心は位数 2 の巡回群二つの直積であり，n が偶数であって 4 の倍数でないならば，$\tilde{H}_n$ の中心は位数 4 の巡回群になる．

多様体 H_n の基本群を定めるために，群 H_n を，Euclid 空間 E^n における $n-1$ 次元球面 S^{n-1} の上の点に作用する推移的な変換群と考える．$p \in S^{n-1}$ として，H_n の点 p に対応する固定変換部分群（§ 3, K）参照）を考えれば，これは明らかに群 H_{n-1} と同型であり，記号としてそのまま H_{n-1} を流用しておく．すると，$H_n/H_{n-1} = S^{n-1}$ となるから，例 90 の結果によって，多様体 H_n および H_{n-1} の基本群は，$n \geqq 4$ の場合，互に同型である．H_3 の基本群は位数 2 であることを用いて（例 89 参照），H_n, $n \geqq 3$, の基本群もすべて位数 2 であることを知る．

H_n に属するすべての行列と可換な任意の n 次の正方行列 z は，スカラー行列[1]に限ることを証明する．$a(p, q) = a$ は二つの整数 p および q, $p \neq q$, $1 \leqq p \leqq n$, $1 \leqq q \leqq n$, に関係する H_n の行列であって，その要素は，

$$a_{ii} = 1,\quad i \neq p,\quad i \neq q\ ;\ a_{pq} = -a_{qp} = 1$$

を除き他はすべて 0 なるものとする．$za = az$ から，z の要素がみたす関係として，

$$z_{pp} = z_{qq}, \tag{9}$$

$$\alpha \neq p, \alpha \neq q \text{ ならば，} z_{\alpha p} = z_{\alpha q} = 0 \tag{10}$$

を得る．いま $n \geqq 3$ の場合を考え，$z_{\alpha\beta}$ を対角線にない要素とすると，2 数 p, q は $q = \beta, p \neq \alpha$ であるように選ぶことができるから，(10) から $z_{\alpha\beta} = 0$ が出る．従って，z は対角行列となるが，さらに (9) によって，スカラー行列でなければならない．特に，群 H_n の中心はスカラー行列のみから成る．n が奇数のとき，H_n の含むスカラー行列は e ただ一つであり，n が偶数のときには，H_n の含むスカラー行列は e と　e との二つだけである．こうして，H_n の中心が決定された．

訳註 1)　λe（λ は実数，e は単位行列）の形の行列．

次に，n が偶数の場合につき，$\tilde{H}_n$ の中心の構造を調べる．そのためにまず，群 H_n 内に，e から $-e$ に到る道 f を次のように定める．$\sigma(t)$ は，平面を角 πt だけまわす回転を表わす2次の行列，すなわち

$$\sigma(t) = \begin{Vmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{Vmatrix}$$

とする．この $\sigma(t)$ が $\frac{n}{2}$ 個，対角線に沿って並び，他の要素は0であるような n 次の行列を $f(t)$ とする．$f(t)$ は H_n 内の道として，e を $-e$ に結んでいる．これを被覆し $\tilde{H}_n$ の単位元から出る道 $\tilde{f}$ は，$\tilde{H}_n$ の中心に属する元 u を終点にもち，H_n への被覆準同型写像による u の像は $-e$ である．このことから，もし $\tilde{H}_n$ の中心が位数4の巡回群ならば，u は位数4の元であり，またもし $\tilde{H}_n$ の中心が位数2の群二つの直和ならば，u は位数2の元である．被覆群 $\tilde{H}_n$ における乗法の定義により（定理79の証明参照），元 u^2 は，道 $f((-e)f)$ を被覆する道の終点になっている．ところで，$f((-e)f)$ は，$g(t)=f(2t)$ とおいて得られる道 g に他ならない．かくして，もしも閉道 g が多様体 H_n の中でホモトープ0であるならば，元 u^2 の位数は1，従って u の位数は2であり，またもし閉道 g が H_n においてホモトープ0でないならば，元 u^2 の位数は2，従って u の位数は4でなければならない．道 g の性質を調べるために，$\frac{n}{2}$ 個の2次の行列 $\sigma(2t^1), \cdots, \sigma(2t^{n/2})$ を順次に対角線に沿って並べた n 次の正方行列を作り，これを $h(t^1, \cdots, t^{n/2})$ とおく．h は函数として，$\frac{n}{2}$ 次元の立方体から H_n の中への連続写像を与える．この立方体の頂点 $(0, 0, \cdot\cdot, 0)$ から頂点 $(1, 1, \cdots, 1)$ に到る対角線は，写像 h により道 g に写され，各稜はそれぞれ H_n の閉じた道に写るが，後者はすべてホモトープ0でないことが知られる（例89,（4），および例90の証明参照）．一方，$\frac{n}{2}$ 次元の立方体の中では，対角線は $\frac{n}{2}$ 個の稜から成る道にホモトープであるから，H_n において g は $\frac{n}{2}$ 個のホモトープ0でない道の積にホモトープとなる．これから，$\pi_1(H_n)$ の位数が2であることを用いて，g がホモトープ0であることと，$\frac{n}{2}$ が偶数であることとは同時に起ることを知る．

これで，群 $\tilde{H}_n$ の中心の構造に関する問題は，完全に解けたわけである．

例 92. G は絶対値 1 の 4 元数が作る乗法群（§26, A）参照），H は単位 4 元数の全体，すなわち $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ の集まりとする．集合 H は，明らかに，群 G の，位数 8 の非可換部分群である．従って，剰余類の作る空間 G/H は 3 次元多様体で，H に同型な非可換基本群をもっている（§50, E）参照）．

第10章　リー群とリー代数

第7章でリー群という概念が定義された．また，そこでリー群の最も簡単な諸性質も確立された．この章では第7章に得られた重要な結果を更に詳しく研究しよう．各リー群には，ずっと簡単な代数系即ち**リー代数**が対応する．更にリー群の局所的性質は完全にリー代数の性質に帰着することが証明される．これがこの章の主な内容である．またこれらに関連したいくつかの概念についても考察する．Killing〔17〕，Cartan〔6〕，Weyl〔45〕等によってなされた更に深い結果は（コンパクト群の場合についてのみであるが）第11章で扱う．

第7章でリー群の研究はいくつかの変数の3回微分可能な函数の考察に帰着した．そこでこの章では微分学および微分方程式の理論を自由に用いることにする．これがこの章の主要な方法である．

この章では相当複雑な計算をしなければならないから第7章と同様にテンソルの記法を用いることにする．

§52.　構造定数，リー代数

ここではリー群の**構造定数**という概念を導入しよう．それらはテンソルを作る．即ちリー群における座標の変換に際してテンソルの成分として変換される．**リー代数**は種々の座標系をとったときの構造定数の全体と同値であって座標系によらない概念である．ここでは構造定数の間の基本関係式を導く．これは**Lie の第3基本定理**の内容をなすもので（定理81参照），それに対応した関係式がリー代数において成立つ．

この§の主な方法は問題の函数を2次の項まで，時には3次の項までTaylor展開することである．この展開の係数から構造定数とその間の関係が与えられる．最後に，導函数を調べるよりTaylor級数を利用する方が，ずっと我々の目的には便利であることに注意して置こう．

A) 級数の剰余項は詳しくは書かない．我々はそれを単に ε にそれぞれ添数をつけて表わす．各 ε の無限小の次数はその都度書添える．ε が変数 $x_1, \cdots, x_n$ の函数であるとき，$\rho = \sqrt{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$ として，ε/ρ^q が $\rho \to 0$ なるとき 0 に収束するならば ε は $x_1, \cdots, x_n$ に関し $\boldsymbol{q+1}$ **次の無限小**であるという．

B) 以下我々は点またはベクトルの座標成分をその点またはベクトルと同じ文字に添数をつけて表わすことにする．これによって，いたずらに記号が複雑になることを防ぐことができる．

定義 47. G を一つの r 次元リー群芽とし，D をその一つの微分可能な座標系とする(定義 39 参照)．

x および y を単位元 e に十分近い二つの G の元とすれば積 $f = xy = f(x, y)$ もまた十分 e に近い．そして乗法演算は座標系 D によって次のような形に書表わすことができる．

$$f^i = f^i(x, y) = f^i(x^1, \cdots, x^r; y^1, \cdots, y^r). \tag{1}$$

単位元の座標成分はすべて 0 であるから次の関係式が得られる．

$$f^i(x, e) = f^i(x^1, \cdots, x^r; 0, \cdots, 0) = x^i. \tag{2}$$

$$f^i(e, y) = f^i(0, \cdots, 0; y^1, \cdots, y^r) = y^i. \tag{3}$$

函数 f^i は仮定により 3 回連続微分可能であるから，3 次の項までの Taylor 級数に展開できる．関係式(2)及び(3)によってこの展開は，容易に判るように次のような特殊な形を有する．

$$f^i = x^i + y^i + a_{jk}{}^i x^j y^k + g_{jkl}{}^i x^j x^k y^l + h_{jkl}{}^i x^j y^k y^l + \varepsilon_1{}^i, \tag{4}$$

ここで $\varepsilon_1{}^i$ は点 x 及び y の座標に関し 4 次の無限小である．

$$c_{jk}{}^i = a_{jk}{}^i - a_{kj}{}^i \tag{5}$$

なる数を群 G の座標系 D に関する**構造定数**という．構造定数はもちろん，

$$c_{jk}{}^i = -c_{kj}{}^i \tag{6}$$

を満足する．

関係式(4)はリー群は 1 次の近似では可換であり，r 次元のベクトル群と同型であることを示している．一方既に 2 次の近似においては可換性からのへだたりが示される．容易に判るように，可換群でもある座標系においては(4)の

如き展開において0でない2次の項を有することがあり得る．しかし可換群 G の場合にはもちろん $a_{jk}{}^{i}=a_{kj}{}^{i}$ が成立つ．従って可換群の構造定数は0である．かかる事情は構造定数がリー群に対して本質的な意味をもつことを示す最初の例である．後に証明するように構造定数はリー群の局所的な構造を完全に決定する．それ故構造定数という名前が付いているのである．

次に構造定数の意味を一そう明らかにする他の定義を与えよう．

C) x, y を群 G の二つの元とし，その交換子 q を考える（§4, C)参照）．即ち，

$$q = xyx^{-1}y^{-1} = q(x, y). \tag{7}$$

$q(x, y)$ という函数は，座標成分で表わせば次のような形である．

$$q^{i} = c_{jk}{}^{i}x^{j}y^{k} + \varepsilon_2{}^{i} \tag{8}$$

（(5)参照）．ここで $\varepsilon_2{}^{i}$ は3次の無限小である．関係式(8)は構造定数の新しい定義の役割を果たす．(4), (5), (8)から直ちに，

$$q^{i}(x, y) = f^{i}(x, y) - f^{i}(y, x) + \varepsilon_3{}^{i} \tag{9}$$

なる関係が得られる．ここで $\varepsilon_3{}^{i}$ はやはり3次の無限小である．

(8)を証明するために，先ず第一に元 z の逆元 z'，即ち $zz'=e$ なる z' の座標を計算しよう．(4)式を使うと，

$$z'^{i} = -z^{i} + a_{jk}{}^{i}z^{j}z^{k} + \varepsilon_4{}^{i} \tag{10}$$

が得られる．$z^{*}=xy$, $z=yx$ とすると(4), (7), (5)及び(10)により $q=z^{*}z'$ 及び

$$q^{i} = (x^{i} + y^{i} + a_{jk}{}^{i}x^{j}y^{k}) + (-x^{i} - y^{i} - a_{kj}{}^{i}x^{j}y^{k} + a_{jk}{}^{i}(x^{j}+y^{j})(x^{k}+y^{k}))$$
$$- a_{jk}{}^{i}(x^{j}+y^{j})(x^{k}+y^{k}) + \varepsilon_2{}^{i} = c_{jk}{}^{i}x^{j}y^{k} + \varepsilon_2{}^{i}$$

が得られる．かくして関係式(8)が証明された．

定理 81. リー群 G の構造定数（定義47参照）は次の関係をみたす．

$$c_{ij}{}^{p} = -c_{ji}{}^{p}, \tag{11}$$

$$c_{is}{}^{p}c_{jk}{}^{s} + c_{js}{}^{p}c_{ki}{}^{s} + c_{ks}{}^{p}c_{ij}{}^{s} = 0. \tag{12}$$

関係式(12)は群 G における乗法が結合律をみたすことと密接に関係する．

証明. (11)は既に証明された（(6)参照）．(12)を得るためには群 G における乗法の結合律を座標の形で書いて見ればよい．いま，

$$u = yz, \quad v = xy, \quad w = xu, \quad w' = vz$$

と置き，等式 $w = w'$ を座標で書表わして見よう．（4）式を用い，3次の項まで計算すると，次の式が得られる．

$$\begin{aligned} w^p = x^p &+ (y^p + z^p + a_{jk}{}^p y^j z^k + g_{ijk}{}^p y^i y^j z^k + h_{ijk}{}^p y^i z^j z^k) \\ &+ a_{is}{}^p x^i (y^s + z^s + a_{jk}{}^s y^j z^k) + g_{ijk}{}^p x^i x^j (y^k + z^k) \\ &+ h_{ijk}{}^p x^i (y^j + z^j)(y^k + z^k) + \varepsilon_5{}^p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'^p = (x^p &+ y^p + a_{ij}{}^p x^i y^j + g_{ijk}{}^p x^i x^j y^k + h_{ijk}{}^p x^i y^j y^k) \\ &+ z^p + a_{sk}{}^p (x^s + y^s + a_{ij}{}^s x^i y^j) z^k + g_{ijk}{}^p (x^i + y^i)(x^j + y^j) z^k \\ &+ h_{ijk}{}^p (x^i + y^i) z^j z^k + \varepsilon_6{}^p. \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon_5{}^p, \varepsilon_6{}^p$ は4次の無限小である．

w^p 及び w'^p の1次の項を比較すれば，

$$x^p + (y^p + z^p) = (x^p + y^p) + z^p$$

が得られ，2次の項を比較すれば，

$$a_{jk}{}^p y^j z^k + a_{is}{}^p x^i y^s + a_{is}{}^p x^i z^s = a_{ij}{}^p x^i y^j + a_{sk}{}^p x^s z^k + a_{sk}{}^p y^s z^k$$

が得られる．このように1次及び2次の項の比較からは恒等式しか得られない．

次に3次の項を比較しよう．その際3点 x, y, z の座標を同時に含む項のみを比較する．それは，それらだけで両辺が等しくならなければならないからである．更に他の3次の項からは恒等式が導かれるからその係数を比較しても新しい関係式は得られない．こうして次の式が得られる．

$$a_{is}{}^p x^i a_{jk}{}^s y^j z^k + h_{ijk}{}^p x^i (y^j z^k + y^k z^j) = a_{sk}{}^p a_{ij}{}^s x^i y^j z^k + g_{ijk}{}^p (x^i y^j + x^j y^i) z^k.$$

この式の係数を比較して次の等式が得られる．

$$a_{is}{}^p a_{jk}{}^s - a_{sk}{}^p a_{ij}{}^s = -h_{ijk}{}^p - h_{ikj}{}^p + g_{ijk}{}^p + g_{jik}{}^p \qquad (13)$$

この等式において右辺の各項を消去しよう．そのために右辺に現われる添数 i, j, k にあらゆる可能な値をとらせる．このようにして六つの関係式が得られる．これらの式は添数の順列が偶なるか奇なるかに従って偶及び奇のものに分かれる．これらのすべての式に偶なるものには（＋1）を掛け，奇なるものには（－1）を掛けて総和する．このようにして得られた式 (a) の右辺は0であり左辺は12個の項よりなる．関係式(12)において構造定数 $c^i{}_{jk}$ を（5）によって $a_{jk}{}^i$ で表

わせば，やはり左辺が12個の項よりなり右辺が0なる関係式(b)を得る．容易に判る通り順列の符号から二つの関係式(a)及び(b)は一致する．従って関係式(12)は関係式(13)及び(5)から導かれたことになる．

これで定理81は証明された．

次にリー代数の定義に移ろう．

定義48. R を可換体 K 上の r 次元ベクトル空間とする(後で使うのは K が実数体または複素数体の場合である)．R の二つのベクトルに対し次の関係をみたす積の演算が定義されているとする．即ち，二つのベクトル a 及び b に対し**交換子**と名付けられる第3のベクトル $c=[a,b]$ が対応し，この交換子の演算が次の三つの条件(14)，(15)，(16)をみたすものとする．

$$[\alpha a+\alpha' a', b]=\alpha[a,b]+\alpha'[a',b] \tag{14}$$

(α 及び α' は K の元である)．

$$[a,b]+[b,a]=0 \tag{15}$$

及び

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0. \tag{16}$$

このような法則をみたす交換子演算を有するベクトル空間 R を体 K 上の**リー代数**［又は**リー環**］という(体 K が実数体であるとき R を**実リー代数**といい，K が複素数体であるとき R を**複素リー代数**という．リー群 G のリー代数(定理82参照)は常に実リー代数である．それで一々実ということを断らず単にリー代数と呼ぶ)．

R の任意の2元 a,b に対し $[a,b]=0$ となるときにリー代数 R は**可換**であるという．

交換子 $[a,b]$ は a,b に対し双1次な演算であるから((14)及び(15)参照)，座標成分で表わすと次のようになる．

$$c^i=[a,b]^i=\overset{*}{c}_{jk}{}^i a^j b^k. \tag{17}$$

ここで体 K の元 $\overset{*}{c}_{jk}{}^i$ はリー代数 R の与えられた座標系に関する**構造定数**と呼ばれる．関係(15)及び(16)からリー代数 R の構造定数の間に成立つ次の関係式が導かれる．

$$\overset{*}{c}_{jk}{}^{i} = -\overset{*}{c}_{kj}{}^{i}, \tag{18}$$

$$\overset{*}{c}_{is}{}^{p}\overset{*}{c}_{jk}{}^{s} + \overset{*}{c}_{js}{}^{p}\overset{*}{c}_{ki}{}^{s} + \overset{*}{c}_{ks}{}^{p}\overset{*}{c}_{ij}{}^{s} = 0. \tag{19}$$

容易にわかるように，逆に関係式(18)及び(19)を満足する体 K の元 $\overset{*}{c}_{jk}{}^{i}$ に対し，交換子演算を関係式(17)によって定義すれば，体 K 上の一つのリー代数が得られる．従って(18)及び(19)をみたす構造定数 $\overset{*}{c}_{jk}{}^{i}$ の研究はリー代数 R の研究と同値である．

定理 82. G を r 次元のリー群芽とする．§41 の命題 C)により G に含まれる任意の微分可能な曲線 $x(t)$ に対し接ベクトル a が対応する．このようにして群 G に r 次元ベクトル空間 R を随伴させることができる．R の中に交換子演算(定義 48 参照)を群 G の性質から導かれるように定義しよう．a 及び b を R の二つの元とし，それらはそれぞれ曲線 $x(t)$ 及び $y(t)$ の接ベクトルとなっているものとする．

$$q(t) = x(t)y(t)(x(t))^{-1}(y(t))^{-1} \tag{20}$$

と置けば，$q(t)$ は G における一つの曲線を定義する．この曲線上に新しい径数 s を $t=\sqrt{s}$ で定義する．かくして径数 s の負でない値に対して定義された曲線 $q(\sqrt{s})$ が得られる．この曲線の接ベクトルを c としよう．c はベクトル a 及び b によって一意的に定まる．我々は交換子 $[a, b]$ を $[a, b]=c$ によって定義する．このようにしてベクトル空間 R に定義された交換子演算は条件(14)，(15)及び(16)を満足する．このようにして得られた(実)リー代数 R を**リー群 G のリー代数**という．記号：$G\rightarrow R$．対応する座標系における群 G 及びリー代数 R の構造定数は一致する(定理 47 及び 48 参照)．

証明. この定理を証明するために，G に一つの微分可能な座標系をとり，ベクトル c のこの座標系における成分を計算して見よう．容易に判るように $c^i = \lim_{t\to 0}\dfrac{q^i(t)}{t^2}$ である．(8)式によって，

$$c^i = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}(c_{jk}{}^{i}x^j(t)y^k(t) + \varepsilon_7{}^i(t)) = c_{jk}{}^{i}a^jb^k$$

($\varepsilon_7{}^i(t)$ は t について 3 次の大きさである)．従って，

$$c^i = [a, b]^i = c_{jk}{}^{i}a^jb^k$$

が得られる．従ってリー代数 R の構造定数はリー群 G の構造定数と一致する．リー群 G の構造定数は関係式(11)及び(12)をみたすから R の交換子積は(14)，(15)及び(16)なる関係式をみたす．即ち，R は実際にリー代数である．

D)　リー群 G のリー代数 R の交換子演算を最も速く計算するには次のようにすればよい．差 $f^i(x, y)-f^i(y, x)$ ((1)参照)の展開における2次の項の和を

$$\overset{*}{q}{}^i(x, y) = \overset{*}{q}{}^i(x^1, \cdots, x^r\,;\ y^1, \cdots, y^r)$$

とする．このときベクトル $c=[a, b]$ の座標成分は

$$c^i = \overset{*}{q}{}^i(a^1, \cdots, a^r\,;\ b^1, \cdots, b^r) \tag{21}$$

で与えられる．この命題が正しいことは関係式(9)から直ちに知られる．

リー代数の果たす役割は，任意の(実)リー代数は一意的にリー群芽と対応するという事実に基く．この事実の証明に以下の§は捧げられる．

各リー代数に対し大局的なリー群が対応するかという問題はずっと複雑であるが，やはり肯定的に解決される．このときはもはや対応の一意性は失われる．即ち，同じ一つのリー代数がいくつかの同型でない大局的リー群に対応することがあり得るのである．しかしこのときこれらのリー群はすべて互に局所同型でありその相互の関係については第9章の結果によって解決が与えられている．

例 93.　R を3次元のベクトル空間とし，その中に通常の方法でベクトル積が定義されているものとする．即ち，任意の二つのベクトルの対 a, b に対し，そのベクトル積 $[a, b]$ が対応しているものとする．このとき二つのベクトル a, b の交換子積をそのベクトル積 $[a, b]$ で定義すれば，よく知られたベクトル解析の法則によって定義48の諸条件がみたされる．かくしてリー代数 R が得られる．

この R が絶対値1の4元数の作るリー群 G のリー代数であることを証明しよう．群 G は3次元 Euclid 空間の廻転群 H_3 と局所同型である(例89参照)から，このことが証明されれば R は H_3 のリー代数でもあることになる．1に近い任意の4元数 $x \in G$ は次の形に書ける．

$$x = 1 + \frac{x'}{\sqrt{2}} + \varepsilon.$$

ここで x' は純4元数で，その成分を群 G における点 x の座標成分と見なすこ

とができる. また ε は実 (4 元) 数でベクトル x' に関し 2 次の無限小である. 命題 D) により交換子積を構成するには 1 に近い二つの G に属する 4 元数 x, y をとり $xy-yx$ を計算して 3 次の項は無視して x 及び y の座標の双 1 次形式となるものを取出せばよい.

$$xy-yx=\left(1+\frac{x'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_1\right)\left(1+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_2\right)-\left(1+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_2\right)\left(1+\frac{x'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_1\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x'y'-y'x')+\varepsilon_3=\frac{1}{2}(-(x',y')+[x',y']+(y',x')-[y',x']$$
$$+\varepsilon_3=[x',y']+\varepsilon_3$$

となる. ここで (x',y'), $[x',y']$ は (すべての純 4 元数の作る 3 次元ベクトル空間における) スカラー積及びベクトル積である (例 47 参照).

§53. 部分代数, 剰余代数, 準同型写像

前の§では, すべてのリー群 G にはそのリー代数 R を対応させた. この§では群 G の部分群, 正規部分群, 剰余群及び準同型写像に対応する概念をリー代数において構成しよう.

A) R を体 K 上のリー代数とする (定義 48 参照). R の部分集合 S は次の条件をみたすとき, R の**部分代数**という. a) 部分集合 S はベクトル空間 R の部分空間である. 即ち, S に属する任意の 2 元 a, b に対し $\alpha a+\beta b$ がまた S に属する. 但しここで α, β は体 K の任意の 2 元とする. b) a, b が部分集合 S に属するならば $[a, b]$ も S に属する. 明らかにリー代数 R の 1 次元部分空間はすべて R の部分代数である. リー代数 R の部分代数 S が次の条件をみたすとき**イデアル**という. c) 任意の $a\in R, b\in S$ に対し $[a, b]\in S$ となる. リー代数 R が $\{0\}$ 及び R 以外のイデアルを有しないとき**単純**であるという. イデアル S は次の条件をみたすとき**中心イデアル**であると言う: d) 任意の $a\in R, b\in S$ に対して $[a, b]=0$ となる. すべての $a\in R$ に対して $[a, b]=0$ となる $b\in R$ の全体が作る集合はリー代数 R の最大の中心イデアルである. これを R の**中心**と言う.

次の定理は A) において導入された諸概念がその名にふさわしいことを示す.

定理 83. G を任意の一つのリー群芽とし, R をそのリー代数とし, H を G

の一つの部分群芽とする．R に属するベクトルで H に含まれる曲線の接ベクトル(§41, C)参照)となっているものの全体を S とする．このとき S はリー代数 R の部分代数であってリー群芽 H のリー代数である．この事実を我々は部分群芽 H に部分代数 S が対応するという．記号：$H \to S$．H が不変部分群芽であるときは S はイデアルである．H が中心不変部分群芽であるとき S は中心イデアルである．

証明．定理62によって H は多様体 G の微分可能な部分多様体であるから，S は R の部分空間である．従って A) の部分代数の条件の内，a) はみたされる．S が条件 b) もみたすことを証明しよう．a 及び b を S に属する二つのベクトルとし共に H に含まれる曲線 $x(t)$ 及び $y(t)$ の接ベクトルになっているものとしよう．ベクトル $c=[a,b]$ を見出だすために曲線 $q(t)=x(t)\,y(t)\,(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}$ を考えよう(定理82参照)．H は部分群芽であるから $q(t)$ は H に含まれる．従って曲線 $q(\sqrt{s})$ も H に含まれる．ベクトル $c=[a,b]$ は曲線 $q(\sqrt{s})$ の接ベクトルであるから S に含まれる．即ち $[a,b]\in S$．

次に H が不変部分群芽であるとき S が A) の条件 c) をみたすことを証明しよう．$a\in R, b\in S$ とし，a は G に含まれる曲線 $x(t)$ の接ベクトルで b は H に含まれる曲線 $y(t)$ の接ベクトルとしよう．このとき元 $x(t)y(t)(x(t))^{-1}$ は H に含まれる．何となれば H が不変部分群であるから．従って元 $q(t)=x(t)y(t)(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}$ もまた H に含まれる．そこで曲線 $q(\sqrt{s})$ は H の中を通り，その接ベクトル $c=[a,b]$ は S に含まれる．

H が中心不変部分群であるときは，不変部分群に関し上に述べた議論によって容易に判るように，この場合曲線 $q(t)$ は1点 e のみよりなり，その接ベクトルは0である．

これで定理83は証明された．

B)　R を体 K 上の一つのリー代数とし，S をそのイデアルとする(A)参照)．R のベクトルをイデアル S による剰余類によって類別する．このようにして得られた剰余類の集合 R^* はまた体 K 上のベクトル空間となる．ベクトル空間 R^* には自然な方法で交換子演算が次のようにして定義される(定義48参照)．

二つの剰余類 A 及び B に対して，$a\in A, b\in B$ をとり $c=[a,b]$ とする．元 c を含む剰余類 C は代表元 a 及び b のとり方に依存せず，剰余類 A 及び B によって一意的に定まることを証明しよう．そのために任意の元 $a'\in A$ をとり $c'=[a',b]\in C$ なることを証明しよう．実際 $c'-c=[a',b]-[a,b]=[a'-a,b]\in S$，(A)，条件 c) 参照)．従って $c'\in C$ である．剰余類 A 及び B の交換子を $[A,B]=C$ で定義する．R における交換子演算が§52の条件 (14), (15), (16) をみたすから，R^* における交換子演算もまたこれらの条件を満足させる．このようにして R^* は体 K 上のリー代数となる．R^* をリー代数 R のイデアル S による**剰余(リー)代数**といい，$R^*=R/S$ と書く．

C) R 及び R' を体 K 上の二つのリー代数とし，g を R から R' の中への写像とする．g が次の二つの条件をみたすとき**準同型写像**という．

a) g は1次写像である．即ち，K の任意の元 α 及び β に関し，

$$g(\alpha a+\beta b)=\alpha g(a)+\beta g(b),\quad (a\in R, b\in R)$$

b)
$$g([a,b])=[g(a),g(b)],\quad (a\in R, b\in R)$$

準同型写像 g によってリー代数 R' の 0 に写像される R の元の全体 S を準同型写像 g の**核**という．準同型写像 g が1対1の写像であるときには**同型写像**という．二つのリー代数 R 及び R' は一方より他方の上への同型写像が存在するとき**同型**であるという．一つのリー代数からそれ自身の上への同型写像を**自己同型(写像)**という．[R と R' が同型であることを $R\cong R'$ で表わす.]

D) R 及び R' を体 K 上の二つのリー代数，g を R から R' の上への準同型写像とし，S を g の核とする．このとき S は R のイデアルであり，剰余代数 R/S は R' に同型である (A), B), C) 参照)．

g はベクトル空間 R から R' への1次写像であるから，S は R の部分ベクトル空間である．しかも $a\in R, b\in S$ ならば

$$g([a,b])=[g(a),g(b)]=[g(a),0]=0$$

であるから，$[a,b]\in S$ となる．従って S はリー代数 R のイデアルである．

a' を R' の任意の一つの元とし，R の元で g によって a' に写像されるものの全体を A で表わそう．g はベクトル空間 R からベクトル空間 R' の上への準同

型写像であるから，群に関する準同型定理によってAはSによるRの一つの剰余類である．従って剰余代数R/Sの元とリー代数R'の元の間には1対1の対応が存在する．この対応がリー代数R/SとR'の間の同型写像であることは直ちに判る．

次の定理は，いま導入した概念の意味を明らかにするものである．

定理 84. G及びG'を二つのリー群芽とし，fをGからG'の中への局所準同型写像とする．R, R'をそれぞれG, G'のリー代数とする．$a \in R$に対し，$x(t)$をaを接ベクトルとするGに含まれる曲線とする．このとき，$f(x(t))$はG'内の曲線であって，その接ベクトルをa'とすれば，ベクトルa'はベクトルaによって一意的に定まる．即ちa'は曲線$x(t)$に依存せず(その接ベクトルaのみによって)一意的に決まる．そこで$a' = g(a)$と置くことができる．このgはリー代数Rからリー代数R'の中への準同型写像である．fがG'の上への準同型写像なるときはgもまたリー代数R'の上への準同型写像である．かくして群GからG'の中への任意の準同型写像fに対してリー代数RからR'の中への準同型写像gが自然に対応する．記号：$f \to g$. Nを準同型写像fの核とし，Sを準同型写像gの核とする．このとき群芽Gの部分群芽Nに対応する，リー代数RのイデアルがSである：$N \to S$(定理83参照)．従ってfが同型写像なるときはgもまた同型写像である．

証明. $f(G)$はリー群芽G'の部分群芽であるから，定理を証明するにはfがGからG'全体の上への写像であるときに証明すればよい．定理63によって，写像fは(座標の)微分可能な函数として表わされる．これから容易に，定理にのべられている写像gが一意的に定まり，かつベクトル空間Rからベクトル空間R'の中への1次写像となることが判る．次に$x(t)$及び$y(t)$をGに含まれる二つの曲線とし，a及びbをその接ベクトルとする．

$$q(t) = x(t)y(t)(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}$$

とおく．このときベクトル$c = [a, b]$は曲線$q(\sqrt{s})$の接ベクトルである(定理82参照)．ベクトル$a' = g(a)$及び$b' = g(b)$はそれぞれ曲線$x'(t) = f(x(t))$及び$y'(t) = f(y(t))$の接ベクトルである．ベクトル$c' = [a', b']$を定めるために曲線

$$q'(t) = x'(t)y'(t)(x'(t))^{-1}(y'(t))^{-1}$$

を考えよう．fは準同型写像であるから $q'(\sqrt{s}) = f(q(\sqrt{s}))$ である．従って $g(c) = c'$ であり，g が準同型写像であることが証明された．

S' を不変部分群 N に対応する R のイデアルとする(定理83参照)．N に含まれる任意の曲線は準同型写像 f により1点 e' へ写されるから $S' \subset S$ である．$S' = S$ は次元の計算から知られる．

これで定理84は証明された．

E) G, G', G'' を三つのリー群芽とし，R, R', R'' をそのリー代数とする．G から G' の中への局所準同型写像 f' と G' から G'' の中への局所準同型写像 f'' が与えられているとし，対応するリー代数の準同型写像を g' 及び g'' とする．即ち：$f' \to g'$, $f'' \to g''$(定理84参照)．$f = f''f'$, $g = g''g'$ と置けば，局所準同型写像，f には準同型写像 g が対応する．即ち $f \to g$ である．

命題E)の証明は，定理84において与えた対応の定義から直ちに出る．$x(t)$ が G に含まれる曲線でその接ベクトルを a とすれば，曲線 $f'(x(t))$ の接ベクトルは $g'(a)$ であり，曲線 $f''(f'(x(t)))$ の接ベクトルは $g''(g'(a))$ である．即ち曲線 $f(x(t))$ の接ベクトルは $g(a)$ である．従って $f \to g$ である．

F) リー代数 R が二つの部分代数 S 及び T の**直和に分解**されるというのは，S 及び T が R のイデアルであって，ベクトル空間 R が部分空間 S 及び T の直和に分解されるということと定義する．リー代数 R が，部分代数 S 及び T の直和に分解されるときは，R の任意の元 $x \in R$ は一意的に $x = y + z$, $y \in S$, $z \in T$ と分解される．そして $b \in S$, $c \in T$ ならば $[b, c] = 0$ である．従ってリー代数 S 及び T から逆に R を作り上げることができる．

二つのリー代数 S 及び T の**直和** R は (y, z), $y \in S$, $z \in T$ のような，順序まで考えに入れた S の元と T の元の組の全体に1次演算(加法及び係数体の元を掛けること)をベクトル空間 S 及び T の直和として定義し，交換子演算を $[(y_1, z_1), (y_2, z_2)] = ([y_1, y_2], [z_1, z_2])$ で定めたものとして定義される．リー群芽 G がその正規部分群芽 H 及び K の直積に分解されるときは $G \to R$, $H \to S$, $K \to T$ とすれば，リー代数 R はその部分代数 S 及び T の直和に分解される．このリー群

芽の直積分解とリー代数の直和分解の対応は自動的に(前述の諸項より)確立される．直和分解を任意の有限箇の部分代数に対し定義し，リー群芽の直積分解との対応を与えることも容易にできる．

定理83及び84と命題F)はリー群における種々の概念や関係は，自然にかつ一意的にリー代数における概念や関係に対応することを示している．逆にリー代数からリー群に移ることは後の§で扱う．

例94. 例93の文章を続ける．容易に証明されるように例93のリー代数 R は1次元のものを除き[*non trivial* な]部分代数を有しない．一方任意のリー代数において1次元の部分空間は常に部分代数である．

いま，R が2次元の部分代数 S を有したとしよう．このとき S には二つの1次独立な元 a 及び b が存在する．$[a,b]=c$ は1次独立なベクトル a,b のベクトル積だから0でなく平面 S に垂直である．従って c は S に含まれることができない．全く同様にして R が単純であることが証明される．

§54. 線型リー群，リー代数の自己同型写像

前§の結果から，特にリー群の任意の自己同型に対してリー代数の自己同型が対応する．この章ではリー代数の自己同型を詳しく研究しよう．我々はリー代数の**自己同型(写像全体の作る)群**がそれ自身一つのリー群であることを知る．そしてそのリー代数を構成する．更にリー代数の**随伴群**がリー群芽の内部自己同型から生成されることを知る．そして随伴群のリー代数を構成する．この二つの場合は共に研究は対応するリー代数を定めることに帰着する．リー代数の自己同型はそのリー代数の1次変換であるからこの場合線型リー群が得られることになる．この§の内容は第11章において本質的な役割を果たす．この章では命題B)及びF)のみが用いられる．

線型リー群即ち1次変換の作るリー群は，リー群の理論において重要な役割を果たす．線型リー群のリー代数はそれ自身1次変換より成るから**線型リー代数**である．第一に線型リー代数を定義しよう．それは任意の体 K 上において定義し研究することができるからである．

A)　Aを勝手な一つの体Kの上のベクトル空間とし，Rをベクトル空間A上の1次変換の作るある集合であって，a及びbという二つの1次変換を含めば同時に$ab-ba$及び$\alpha a+\beta b$(ただしα,βは体Kの任意の元である)を含むものとしよう．Rの中では加法及び体Kの元を乗ずることが定義されているから，Rは体K上のベクトル空間である．Rに交換子演算を次のように定義する．

$$[a, b] = ab - ba. \tag{1}$$

これらの定義によってベクトル空間Rは体K上のリー代数となる．このようなリー代数Rを**線型リー代数**という．

交換子演算に関する§52の(14)及び(15)なる性質はRにおいてはもちろん成立つから，(16)を証明しよう．

$a,\ b,\ c$をRに属する三つの1次変換とする．このとき

$$[a, [b, c]] = a[b, c] - [b, c]\,a = abc - acb - bca + cba$$

となる．この式において$a,\ b,\ c$を巡回的に置換して得られる三つの関係式を加えれば交換子演算に関する性質(16)が得られる．

B)　Aを実数体または複素数体上のベクトル空間とし，Gをその上の1次変換の作るある一つの集合とする．その通常の位相と乗法によってGはリー群芽になっているとする．このようなリー群芽Gを我々は**線型**リー群芽という．更に$x(t)$を$t=0$においてeを通る，即ち$x(0)=e$なる，Gに含まれる曲線とする．ベクトル空間Aをそれ自身に写す1次変換の集合においては加法及び実数を掛けることが定義されているから，1次変換の作るtを径数とする曲線$x(t)$の$t=0$における微分係数を

$$a = \lim_{t\to 0} \frac{x(t) - x(0)}{t} \tag{2}$$

によって定めることができる．

この微分係数は，もしもそれが存在するならばそれ自身ベクトル空間Aをそれ自身の中へ写す1次変換となる．このときaは空間Aの1次変換の作る曲線$x(t)$に**接する**という．空間Aの1次変換でGに含まれる曲線に接するものの全体は線型リー代数を作り(A)参照)，Rは自然な対応で群Gのリー代数と

同型になる．即ち曲線 $x(t)$ がそれに接する A の1次変換 a を有するのは $x(t)$ が群 G において接ベクトル a' (§41, C)参照) を有するときで，またそのときに限り，対応 $a \rightleftarrows a'$ は曲線 $x(t)$ のとり方に関係しない．この対応が自然な同型対応を与える．そこで上に述べた線型リー代数 R は線型リー群 G のリー代数と考えてよい．更に $x(t)$ が群 G の1径数部分群でそれに接する1次変換が a である((2)参照)ときは1次変換 $x(t)$ は微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \tag{3}$$

をみたす．これから特に線型リー群芽 G は一意的にその線型リー代数 R により定められることが判る．もっと正確に言えば，ベクトル空間 A の1次変換の作る二つの線型リー群芽 G_1 及び G_2 が同じ線型リー代数 R を有するためには，それらが単位元のある近傍で一致することが必要かつ十分である．

命題B)を証明しよう．G^* をベクトル空間 A のすべての[正則な]1次変換の作る位相群とする．G^* に座標を導入しよう．そのためにベクトル空間 A に一つの基底をとり，$x \in G^*$ なる1次変換のこの基底に対する行列を $\| \delta^i{}_j + x^i{}_j \|$ なる形に書く．ベクトル空間 A が実ならば，元 x の座標として $x^i{}_j$ なる実数をとる．また A が複素ベクトル空間であるときは，x の座標としては複素数 $x^i{}_j$ の実数部及び虚数部をとる．積 $z = xy$ は座標では次の形に書ける．

$$z^i{}_j = (\delta^i{}_\alpha + x^i{}_\alpha)(\delta^\alpha{}_j + y^\alpha{}_j) - \delta^i{}_j = x^i{}_j + y^i{}_j + x^i{}_\alpha y^\alpha{}_j. \tag{4}$$

従って G^* は解析的リー群である．$x(t)$ を G^* における曲線とし $x^i{}_j = x^i{}_j(t)$ をその座標とすれば，曲線 $x(t)$ に接するベクトル a の座標成分 $a^i{}_j$ は定義 (§41, C)参照)によれば次の式で与えられる．

$$a^i{}_j = \frac{dx^i{}_j(0)}{dt}. \tag{5}$$

直ちに判るように関係式(5)は行列の形で書けば(2)式となる．従って群 G^* のリー代数 R^* はベクトル空間 A のそれ自身の中への1次変換の全体からなる．交換子を計算するために§52のD)を利用しよう．$z^* = yx$ とすれば，

$$z^{*i}{}_j = y^i{}_j + x^i{}_j + y^i{}_\alpha x^\alpha{}_j \tag{6}$$

となるから(4)式から(6)式を引けば，

$$q^i{}_j = z^i{}_j - z^{*i}{}_j = x^i{}_\alpha y^\alpha{}_j - y^i{}_\alpha x^\alpha{}_j$$

が得られる．行列表示から1次変換そのものに移ると，上式から

$$[a, b] = ab - ba \tag{7}$$

が得られる．

このようにして，リー群 G^* のリー代数 R^* はベクトル空間 A をそれ自身の中に写す1次変換の全体からなる線型リー代数である．

G はリー群 G^* のある部分群芽であるから，G に含まれる曲線に接する1次変換の全体はリー群芽 G のリー代数を作り，それはリー代数 R^* の部分代数である(定理83参照)．

$x(t)$ を部分群芽 G の1径数部分群でベクトル(1次変換) a から生成されるものとする．このとき

$$x(s+t) = x(s)x(t)$$

であるから，この式を s に関し $s=0$ において微分すれば(3)式が得られる．

これで命題B)は証明された．

次にリー代数の自己同型群が線型リー群であることを確かめよう．そのために対応する線型リー代数を見出だそう．

C) R を任意の体 K 上のリー代数とする．R_A でベクトル空間 R をそれ自身の中へ写す1次変換で，

$$a([u, v]) = [a(u), v] + [u, a(v)]\,;\ u \in R,\ v \in R \tag{8}$$

なる条件をみたすものの全体を表わすことにする[1]．a, b が R_A に属する二つの1次変換とし，α, β を体 K の元とすれば，$\alpha a + \beta b$ はもちろんまた R_A に属する．同様に $[a, b] = ab - ba$ もまた R_A に属する．従って R_A は体 K 上の線型リー代数(A)参照)である．R_A をリー代数 R の**自己同型群のリー代数**または R の**微分のリー代数**という．

$c = ab - ba \in R_A$ を証明しよう．(8)式に変換 b を作用させれば，

$$ba([u, v]) = [ba(u), v] + [a(u), b(v)] + [b(u), a(v)] + [u, ba(v)] \tag{9}$$

となり，同様にして

訳註 1) この性質をみたす1次変換 a をリー代数 R の微分(derivation)という．

$$ab([u, v]) = [ab(u), v] + [b(u), a(v)] + [a(u), b(v)] + [u, ab(v)] \quad (10)$$

となるから，(9)式から(10)式を引いて

$$c([u, v]) = [c(u), v] + [u, c(v)]$$

が得られる．

D)　R を実リー代数，G_A をその自己同型写像の全体とする．もちろん G_A はベクトル空間 R のすべての1次変換の作る群の部分群であるが更に，G_A は一つの線型リー群である(B)参照)．線型リー群 G_A の線型リー代数はリー代数の微分のリー代数である(C)参照)．[G_A をリー代数 R の**自己同型群**という．]

命題D) を証明するためには，ベクトル空間 R の1次変換の1径数部分群 $x(t) = x_t$ が群 G_A に含まれるのは，それを生成する R の1次変換 a が条件 (8) をみたすとき，かつそのときに限ることを証明すれば十分である．これを証明しよう．$x_t \in G_A$ とすれば

$$x_t([u, v]) = [x_t(u), x_t(v)] \quad (11)$$

となる．この式を t について $t=0$ で微分すれば(8)式が得られる．逆に a が(8)式を満足すると仮定しよう．$u(t) = x_t(u)$，$v(t) = x_t(v)$，$w(t) = [u(t), v(t)] - x_t([u, v])$ とし，ベクトル $w(t)$ の t に関する導函数を求めてみよう．(3)式によって

$$\begin{aligned}\frac{dw(t)}{dt} &= [a(u(t)), v(t)] + [u(t), a(v(t))] - ax_t([u, v]) \\ &= [a(u(t)), v(t)] + [u(t), a(v(t))] - a([u(t), v(t)]) \\ &\quad + a([u(t), v(t)]) - ax_t([u, v]) = a([u(t), v(t)]) - ax_t([u, v]) = a(w(t))\end{aligned}$$

となる((8)参照)．

従って a が条件(8)をみたすときは

$$\frac{dw(t)}{dt} = a(w(t)) \quad (12)$$

となる．$w(0) = 0$ だから，(5)によって $w(t) = 0$ となる．従って $x_t \in G_A$ である．

E)　R は任意の体 K 上のリー代数とする．R の任意の元 a に対し

$$p_a(u) = [a, u],\ u \in R \quad (13)$$

によって定められる R の1次変換 p_a が対応する．

$p_a, a \in R$ の形の1次変換の全体 P は線型リー代数で，リー代数 R の微分のリー代数 R_A のイデアルである．リー代数 P をリー代数 R の**随伴リー代数**または R の**内部自己同型群**のリー代数という（C）参照）．更に $g(a) = p_a$ で定義されるリー代数 R からリー代数 P への写像は準同型写像である．準同型写像 g の核は R の中心である．[g を R の随伴表現という．また p_a を $ad\, a$ と表わすことが多い．]

$q \in R_A$, $a \in R$ とし，φ をリー代数 R の任意の自己同型写像とすると

$$p_{q(a)} = [q, p_a], \tag{14}$$

$$p_{\varphi(a)} = \varphi p_a \varphi^{-1} \tag{15}$$

が成立つ．

命題E)を証明しよう．§52, (16)式によって

$$p_a([u, v]) = [a, [u, v]] = [[a, u], v] + [u, [a, v]] = [p_a(u), v] + [u, p_a(v)]$$

が成立つから，$p_a \in R_A$ である．次に a, b を R の二つの元とすれば，§52, (16)によって

$$\begin{aligned} p_{[a, b]}(u) &= [[a, b], u] = [a, [b, u]] - [b, [a, u]] \\ &= p_a p_b(u) - p_b p_a(u) = [p_a, p_b](u) \end{aligned}$$

となるから，P は線型リー代数で，g はリー代数 R からリー代数 P の上への準同型写像である．

P はリー代数 R_A のイデアルであることを証明しよう．そのためには(14)式を証明すれば十分である．$r = [q, p_a]$ とおこう．$r = qp_a - p_a q$ である．1次変換 r を R の任意のベクトル u に作用させると((8)参照)

$$r(u) = q([a, u]) - [a, q(u)] = [q(a), u] + [a, q(u)] - [a, q(u)] = p_{q(a)}(u).$$

故に関係式(14)は正しいことが示された．

最後に関係式(15)を証明しよう．φ はリー代数 R の自己同型写像であるから

$$[\varphi(a), \varphi(u)] = \varphi([a, u])$$

となる．これを言い換えれば

$$p_{\varphi(a)}(\varphi(u)) = \varphi p_a(u)$$

となるから $p_{\varphi(a)}\varphi = \varphi p_a$ であり，従って $p_{\varphi(a)} = \varphi p_a \varphi^{-1}$ である．

これで命題E)は証明された.

F)　Gをリー群(芽), Rをそのリー代数とする. Gの任意の元xに対しGの内部自己同型φ_xが対応する. φ_xは

$$\varphi_x(z) = xzx^{-1},\ z \in G \tag{16}$$

で定義される. リー群(芽)Gの自己同型φ_xには, 定理84によってそのリー代数Rの自己同型l_xが対応する. $f(x) = l_x$で定義される写像fは, リー群(芽)Gからリー代数Rの自己同型写像の作るある線型リー群(芽)Lの上への準同型写像である. この準同型写像の核はGの中心である. Lを群(芽)Gまたはリー代数Rの**随伴群(芽)**という. リー群(芽)Lのリー代数はリー代数Rの随伴リー代数Pである(E)参照). 準同型写像fにはリー代数RからPへの準同型写像$a \to p_a$が対応する.

命題F)を証明しよう. そのために群Gから群Lの上への準同型写像fに対応する, リー代数Rからベクトル空間Rのすべての1次変換の作る群への準同型写像gを計算しよう. $p = g(a), a \in R$と置く. 1次変換pは次の式

$$p(u) = \frac{d}{ds} l_{x(0)}(u),\ u \in R$$

で定められる. 但しここで$x(s)$はGに含まれる曲線でその接ベクトルがaであるものとする(B)参照). $l_{x(s)}(u)$を計算するために, $l_{x(s)}(u)$はtを変数とする曲線$x(s)z(t)(x(s))^{-1}$の接ベクトルであることに注意しよう. 但しここで$z(t)$はuを接ベクトルとするG内の曲線である. 従って座標成分で書けば

$$(p(u))^i = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dt}(x(s)z(t)(x(s))^{-1})^i\right) \tag{17}$$

となる. 但しこの式での微分記号は変数の値が0となる点における微分を意味するものである. 更に

$$\begin{aligned}(x(s)z(t)(x(s))^{-1})^i &= [(x(s)z(t)(x(s))^{-1}(z(t))^{-1})z(t)]^i \\ &= c_{jk}{}^i x^j(s) z^k(t) + z^i(t) + \varepsilon\end{aligned}$$

となる. ここでεは$\sqrt{s^2+t^2}$について3次の無限小である(§52(4)及び(8)参照). この式を(17)式へ代入して微分を実行すれば

$$(p(u))^i = c_{jk}{}^i a^j u^k = [a, u]^i$$

即ち，$p(u) = [a, u] = p_a(u)$ が得られる．

これで命題 F) が証明された．

上に述べた結果によって，次の一意性に関する定理を述べることができる．この定理の一般の場合は後に証明する（定理 89 参照）．

G) 二つのリー群芽 G_1 及び G_2 が，中心が 0 のみよりなる同一のリー代数 R を有するときは，それらは局所同型である．このとき G_1 と G_2 の間の同型写像であって，それに対して R の恒等写像が対応するものが唯一つ存在する．

リー代数 R が中心を有しないから，リー群芽 G_1 及び G_2 もまた中心を有しない（定理 83 参照）．従って群芽 G_i, $i = 1, 2$, からその随伴群芽 L_i の上への（局所）準同型写像 f_i（F）参照）は（局所）同型写像である．更にリー群 L_i はそのリー代数によって一意的に定まり（何となればそれは線型リー群である．B) 参照），L_i のリー代数は共にリー代数 R の随伴リー代数 P だから，リー群 L_i, $i = 1, 2$, は一致する．群 G_2 から群 G_1 の上への同型写像 $f_1^{-1}f_2$ に対してはリー代数 R のそれ自身の上への恒等写像が対応する．群 G_2 から G_1 の上への同型写像でこの性質を持つものは，他には存在しない．実際群 G_1 の恒等写像でない任意の自己同型写像は第 1 種の標準座標では一つの恒等写像でない 1 次写像として表わされるから，それには恒等写像でないリー代数 R の自己同型写像が対応する．

例 95. n 次元の実または複素ベクトル空間 A の上のすべての［正則］1 次変換の全体を G^* とし，その線型リー代数を R^* とする（B) 参照）．直ちに判るように群 G^* は n 次の正則な実または複素正方行列の全体の作る群と考えてよい．その元を $\|\delta_j{}^i + x_j{}^i\|$ という形に書く．リー代数 R^* は n 次の実または複素正方行列の全体としてよい．G^* の二三の興味ある部分群を指摘し，R^* のどのような部分代数がそれらに対応しているかを見よう．

G を行列式が 1 のすべての 1 次変換の全体より成る G^* の部分群，即ち行列式が 1 の行列の全体とする．行列 $\|\delta_j{}^i + x_j{}^i\|$ の行列式は $1 + x_i{}^i + \varepsilon$ の形である．但し ε は座標 $x_j{}^i$ に関して 2 次の大きさである．従って x が部分群 G に含まれるということは

$$x_i^i + \varepsilon = 0 \tag{18}$$

という条件で表わすことができる．G に含まれる任意の曲線 $x(t)$ をとって $x_j^i = x_j^i(t)$ とおき，(18)式を t で微分すれば

$$a_i^i = 0 \tag{19}$$

が得られる．群 G の次元と (19) をみたすすべての行列の作るリー代数の次元が一致するから，いま証明したことから部分群 G に対応する部分リー代数 R はシュプール (対角和) が 0 のすべての 1 次変換より成る．G は群 G^* の正規部分群だから R は R^* のイデアルである．

次に H をすべての直交行列 $\|\delta_{ij} + x_{ij}\|$ から成る G^* の部分群とする．直交行列である条件は

$$x_{ij} + x_{ji} + \varepsilon' = 0 \tag{20}$$

と書くことができる．ここで ε' は座標 x_{ij} に関して 2 次の無限小である．H に含まれる曲線 $x(t)$ を取り $x_{ij} = x_{ij}(t)$ と置き，(20)式を t で微分すれば

$$a_{ij} + a_{ji} = 0 \tag{21}$$

が得られる．これから部分群 H に対応する部分リー代数 S の元は歪対称行列のみから成ることが判る．次元を計算すれば S は(n 次の)すべての歪対称行列の全体であることが判る．

§55. 完全積分可能の条件

構造定数からリー群を構成するときには偏微分方程式論の 1 定理が用いられる．この§では我々は証明なしでこの定理を述べ，後で必要となる二三の事柄についてのみ触れて置こう．

連立偏微分方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \varphi_j{}^i(f^1, \cdots, f^n;\ x^1, \cdots, x^r) = \varphi_j{}^i(f, x), \\ &i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, r, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

を考えよう．ここで f は座標成分が $f^1, \cdots, f^n$ なる点，x は座標成分が $x^1, \cdots, x^r$ なる点を表わす．函数 $\varphi_j{}^i(f, x)$ は f 及び x に対応する座標空間の領域 U 及び

V でどの変数につけても連続な1階偏導函数を持つかまたは解析的とする．$x^1, \cdots, x^r$ は独立な変数であるが $f^1, \cdots, f^n$ はそれらの函数でこれが求むべきものである．求むべき函数 $f(x)$，または座標成分で書けば函数の組

$$f^i(x) = f^i(x^1, \cdots, x^r),\ i = 1, \cdots, n$$

は，方程式(1)へ代入したとき(1)の両辺が独立変数 $x^1, \cdots, x^r$ の函数として恒等的に等しくなるようなものである．

連立方程式(1)を解くという問題は次の形に述べられる．初期値 $x_0 \in V$, $f_0 \in U$ を与えて

$$f(x_0) = f_0 \tag{2}$$

をみたす解 $f(x)$ を見出だすこと．この際函数 $f(x)$ はもちろん x_0 の近傍で定義されており，かつ2回微分可能でなければならない．これについて次の結果が得られる．

定理 85. 連立方程式(1)が任意の初期値 $x_0 \in V$, $f_0 \in U$ に対して解を有するためには

$$\frac{\partial \varphi_k{}^i(f, x)}{\partial f^\alpha}\varphi_j{}^\alpha(f, x) + \frac{\partial \varphi_k{}^i(f, x)}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j{}^i(f, x)}{\partial f^\alpha}\varphi_k{}^\alpha(f, x) - \frac{\partial \varphi_j{}^i(f, x)}{\partial x^k} = 0 \tag{3}$$

という関係が任意の $x \in V$, $f \in U$ に対して常に成立つことが必要である．一方(3)がすべての $x \in V$, $f \in U$ に対して成立つならば，任意に与えた初期値 $x_0 \in V$, $f_0 \in U$ に対して(1)の解が存在し，しかも唯一つに限る．連立方程式は積分可能条件(3)と関係なくいかなる初期条件に対しても一つ以上の解を持ち得ないことを注意して置こう．

解 $f(x)$ がその初期条件によって定まることを，はっきりと書表わすために $f(x) = f(x, f_0, x_0)$ としよう．いま U', V' を二つの領域でその閉苞 $\bar{U}'$, $\bar{V}'$ がコンパクトで $\bar{U}' \subset U$, $\bar{V}' \subset V$ となるものとする．このとき $f_0 \in U'$, $x_0 \in V'$ に対し十分小さな正数 ε が存在して $|x^i - x_0{}^i| < \varepsilon$; $i = 1, \cdots, r$ において解 $f(x, f_0, x_0)$ が存在し，その解は $x_0{}^1, \cdots, x^r$ に関しては連続な2回偏導函数を持ち，$x_0{}^1, \cdots, x_0{}^r$ および $f_0{}^1, \cdots, f_0{}^n$ については連続な1回偏導函数を持つ．また(1)の右辺が解析的ならば解はそのすべての変数について解析的である．

関係式(3)を方程式(1)の**積分可能条件**という．

ここでは唯，条件(3)が必要であることの証明だけを掲げることにする．十分なことの証明は〔42〕第2巻第8章§5及び§6を見よ．［なお補註参照.］

方程式(1)の初期値が $x_0 \in V$, $f_0 \in U$ の解 $f(x)$ が存在したと仮定しよう．この解 $f(x)$ を(1)に代入して得られる恒等式を更に x^k で微分すれば

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \varphi_j{}^i(f, x)}{\partial f^\alpha} \cdot \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi_j{}^i(f, x)}{\partial x^k} = \frac{\partial \varphi_j{}^i(f, x)}{\partial f^\alpha} \varphi_k{}^\alpha(f, x) + \frac{\partial \varphi_j{}^i(f, x)}{\partial x^k} \quad (4)$$

が得られる．$\dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^j}$ であるから $f = f(x)$ は関係式(3)を満たす．

$x = x_0$ のとき $f(x_0) = f_0$ であるから，関係式(3)は $x = x_0$, $f = f_0$ において成立つ．仮定によって初期値は任意に与えることができるから，(3)式は任意の $x \in V$, $f \in U$ に対して成立つ．これで条件(3)の必要性が証明された．

後で，(1)のように導函数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ について解いた形でない方程式を扱う必要が生ずる．そこで後に出て来る形の連立方程式に対する積分可能条件を，我々に最も便利な形に書直そう．

A)　連立微分方程式

$$v_k{}^i(f) \frac{\partial f^k}{\partial x^j} = v_j{}^i(x), \quad i = 1, \cdots, r\,;\, j = 1, \cdots, r \quad (5)$$

を考えよう．ここで $v_j{}^i(z) = v_j{}^i(z^1, \cdots, z^r)$ は領域 U において定義され，すべての変数に関する連続な1回偏導函数を持ち，この領域 U において行列 $\| v_j{}^i(z) \|$ の行列式は0とならないものとする．方程式(5)は容易に(1)の形に書直すことができる．またその積分可能条件は

$$\frac{\partial v_k{}^i(z)}{\partial z^j} - \frac{\partial v_j{}^i(z)}{\partial z^k} = \tilde{c}_{\alpha\beta}{}^i v_j{}^\alpha(z) v_k{}^\beta(z) \quad (6)$$

という形に書ける．ここで $\tilde{c}_{jk}{}^i$ は，(方程式(5)によって定まる)ある定数である．方程式(5)は

$$v_j{}^i(f) df^j = v_j{}^i(x) dx^j, \quad i = 1, \cdots, r \quad (7)$$

という対称な形に書ける．ここで df^j は函数 $f^j(x^1, \cdots, x^r)$ の全微分で dx^j は独立変数 x^j の微分である．

(6)を導くために行列 $\| v_j{}^i(z) \|$ の逆行列 $\| u_j{}^i(z) \|$ を考える．仮定より $\| v_j{}^i(z) \|$

の行列式が U において 0 ではないから逆行列 $\|u_j{}^i(z)\|$ は存在する．そして

$$u_\alpha{}^i(z)v_j{}^\alpha(z)=v_\alpha{}^i(z)u_j{}^\alpha(z)=\delta_j{}^i \qquad (8)$$

が成立つ．但し $\|\delta_j{}^i\|$ は単位行列である．(8)式を z^k で微分すれば

$$v_\alpha{}^i(z)\frac{\partial u_j{}^\alpha(z)}{\partial z^k}+\frac{\partial v_\alpha{}^i(z)}{\partial z^k}u_j{}^\alpha(z)=0 \qquad (9)$$

が成立つ．(5)式に $u_i{}^p(f)$ を乗じて，i について総和して添数をつけかえると

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}=u_\beta{}^i(f)v_j{}^\beta(x) \qquad (10)$$

となる．これで(5)式は(1)の形に書直された．そこでこれに対しては定理 85 を適用することができる．この定理により連立方程式 (10) に対する積分可能条件は次の形に書かれる．

$$\frac{\partial u_\beta{}^i(f)}{\partial f^\alpha}u_\gamma{}^\alpha(f)v_j{}^\gamma(x)v_k{}^\beta(x)+u_\beta{}^i(f)\frac{\partial v_k{}^\beta(x)}{\partial x^j}-\frac{\partial u_\beta{}^i(f)}{\partial f^\alpha}u_\gamma{}^\alpha(f)v_k{}^\gamma(x)v_j{}^\beta(x)$$
$$-u_\beta{}^i(f)\frac{\partial v_j{}^\beta(x)}{\partial x^k}=0. \qquad (11)$$

(11)に $v_i{}^p(f)$ を乗じて i について総和して(8)式及び(9)式を用いると

$$-\frac{\partial v_i{}^p(f)}{\partial f^\alpha}u_\beta{}^i(f)u_\gamma{}^\alpha(f)v_j{}^\gamma(x)v_k{}^\beta(x)+\frac{\partial v_k{}^p(x)}{\partial x^j}$$
$$+\frac{\partial v_i{}^p(f)}{\partial f^\alpha}u_\beta{}^i(f)u_\gamma{}^\alpha(f)v_k{}^\gamma(x)v_j{}^\beta(x)-\frac{\partial v_j{}^p(x)}{\partial x^k}=0$$

が得られる．この式に $u_s{}^j(x)u_t{}^k(x)$ を乗じて j 及び k について総和すれば

$$\left(\frac{\partial v_\beta{}^p(x)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial v_\alpha{}^p(x)}{\partial x^\beta}\right)u_s{}^\alpha(x)u_t{}^\beta(x)=\left(\frac{\partial v_\beta{}^p(f)}{\partial f^\alpha}-\frac{\partial v_\alpha{}^p(f)}{\partial f^\beta}\right)u_s{}^\alpha(f)u_t{}^\beta(f) \qquad (12)$$

が得られる．この最後の式は恒等的に成立たなければならない．ところがこの式には変数 x 及び f が両辺に分離されて含まれているから両辺は共に定数でなければならない．従って

$$\left(\frac{\partial v_\beta{}^i(z)}{\partial z^\alpha}-\frac{\partial v_\alpha{}^i(z)}{\partial z^\beta}\right)u_s{}^\alpha(z)u_t{}^\beta(z)=\tilde{c}_{st}{}^i$$

なる関係が成立つ．この最後の式に $v_j{}^s(z)v_k{}^t(z)$ を乗じて s 及び t について総和すれば関係式(6)が得られる．逆の道を辿って(6)式から(11)式が得られる．

§56. リー群芽の構造定数からの構成

この§では構造定数からリー群芽を構成しよう．これは**Lieの第3定理の逆定理**を与えるものである．この構成は座標の間の関係に帰着される．即ち二つの元 x 及び y の座標の函数としての積 $f = xy = f(x, y)$ の座標を表わす函数 $f^i(x, y)$ を見出だせばよい（定義47参照）．

もちろんこの際構造定数それ自身だけでは函数 $f^i(x, y)$ を定めることはできない．というのは，適当な座標変換を行なうと構造定数は変らないが，この函数 $f^i(x, y)$ は変るということが有り得るからである．従って構成のためには何か或る特別な座標系，例えば第1種または第2種の標準座標を選ばなければならない．他のものを選ぶことも可能であり同様に実行できるが，ここでは第1種の標準座標を選ぶことにする．

リー群芽の構成は，2段に分けて行う．第1段では一意的に函数 $f^i(x, y)$ を定め，またそれらによって定まる補助函数を導入する（この段階が**Lieの第1基本定理**（本定理と逆定理）にあたる）．この補助函数は構造定数を含む或る微分方程式をみたす．この関係が**Lieの第2基本定理**である（(8)参照）．

第2段ではこの微分方程式を積分する（**Lieの第2基本定理の逆定理**）．この際既に標準座標を用いなければならない．それは標準座標においてのみ構造定数によって一意的にこの補助函数が定まるからである．

A） G を任意のリー群芽とし

$$f = xy = f(x, y) \tag{1}$$

と置く．座標で表わせばこの関係式は

$$f^i = f^i(x, y) = f^i(x^1, \cdots, x^r\,;\, y^1, \cdots, y^r) \tag{2}$$

の形に書くことができる．

補助函数を導入しよう．任意の元 $x \in G$ の座標が x^i；$i = 1, \cdots, r$，であるとき

$$\delta x^i,\ i = 1, \cdots, r \tag{3}$$

を x^i の増分とするとき，座標が $x^i + \delta x^i$, $i = 1, \cdots, r$，である G の元を記号的に $x + \delta x$ で表わすことにしよう．このとき $p = (x + \delta x)x^{-1}$ と置き p の座標を増分(3)の Taylor 級数に展開すれば

$$p^i = v_j{}^i(x)\delta x^j + \varepsilon_1{}^i \tag{4}$$

が成立つ．但し $\varepsilon_1{}^i$ は増分（3）に対し2次の無限小であり $v_j{}^i(x) = v_j{}^i(x^1, \cdots, x^r)$ は元 x のある函数である．これに対して

$$v_j{}^i(e) = \delta_j{}^i \tag{5}$$

が成立つ．ここで $\|\delta_j{}^i\|$ は単位行列であり，e は G の単位元である．更に

$$v_k{}^i(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^j} = v_j{}^i(x) \tag{6}$$

が成立つ．従って $f(x, y)$ は（y を固定したとき）x の函数として微分方程式（6）の初期条件

$$f(e, y) = y \tag{7}$$

をみたす解である．

最後に函数 $v_j{}^i(x)$ は次の連立方程式を満足する．

$$\frac{\partial v_k{}^i(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j{}^i(x)}{\partial x^k} = c_{\alpha\beta}{}^i v_j{}^\alpha(x) v_k{}^\beta(x). \tag{8}$$

ここで $c_{jk}{}^i$ はリー群芽 G の構造定数である．（8）式は連立微分方程式（6）の積分可能条件に外ならないことは注目するに価する（§ 55, A）参照）．更に補助函数 $v_j{}^i(x)$ を用いると1径数部分群の方程式を簡単な形に書き上げることができることも注意しておこう．即ち $x(t)$ が群 G の1径数部分群でその接ベクトルが a ならば，これに対し次の方程式

$$a^i = v_j{}^i(x(t))\frac{dx^j(t)}{dt} \tag{9}$$

が成立つ．

命題 A）を証明しよう．

（5）の成立つことは明らかである．

（6）式を証明するために（1）において元 x の座標 x^i が δx^i だけ増したとしよう．このとき元 f の座標もそれに応じて変化する．そこで δf を増分とすれば

$$f + \delta f = (x + \delta x)y$$

となる．この式と（1）式から

$$(f + \delta f)f^{-1} = (x + \delta x)y(xy)^{-1} = (x + \delta x)x^{-1}$$

となる．この式の座標成分を(4)を使って書直すと

$$v_k{}^i(f)\,\delta f^k = v_j{}^i(x)\,\delta x^j + \varepsilon_2{}^i \tag{10}$$

となる．ここで $\varepsilon_2{}^i$ は増分(3)に対して2次の無限小である．δf^k を増分(3)に関する Taylor 級数に展開すれば

$$\delta f^k = \frac{\partial f^k}{\partial x^j}\,\delta x^j + \varepsilon_3{}^k \tag{11}$$

となる．ここで $\varepsilon_3{}^k$ は2次の無限小である．(10)及び(11)から

$$v_k{}^i(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^j}\,\delta x^j = v_j{}^i(x)\,\delta x^j + \varepsilon_4{}^i$$

が得られる．この式で両辺の係数を比較すれば(6)式が得られる．

(8)を証明するために x_0 及び f_0 が単位元に近い二つの元とすれば $f_0 = x_0 y_0$ となる元 y_0 が存在することに注意する．このことから連立方程式(6)は e に十分近い任意の x_0 及び f_0 を初期値とする解を有することが判る．従って定理85によって方程式(6)は積分可能条件をみたす．§55, 命題A)によって，この積分可能条件は

$$\frac{\partial v_k{}^i(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j{}^i(x)}{\partial x^k} = \tilde{c}_{\alpha\beta}{}^i v_j{}^\alpha(x)\,v_k{}^\beta(x) \tag{12}$$

という形をしている．ここで $\tilde{c}_{jk}{}^i$ はある定数である．後はこの定数 $\tilde{c}_{jk}{}^i$ が群 G の構造定数であることを証明しさえすればよい．$x = e$ に対しては(6)式は

$$v_\alpha{}^i(y)\,\frac{\partial f^\alpha(e, y)}{\partial x^j} = \delta_j{}^i$$

となる．この式を y^k で微分すれば

$$\frac{\partial v_\alpha{}^i(y)}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial f^\alpha(e, y)}{\partial x^j} + v_\alpha{}^i(y)\,\frac{\partial^2 f^\alpha(e, y)}{\partial x^j \partial y^k} = 0$$

が得られる．ここで $y = e$ とおけば

$$\frac{\partial v_j{}^i(e)}{\partial y^k} + \frac{\partial^2 f^i(e, e)}{\partial x^j \partial y^k} = 0 \tag{13}$$

となる．従って§52,(4)式から $\dfrac{\partial v_j{}^i(e)}{\partial y^k} = -\,a_{jk}{}^i$ となる．従って(12)式において $x = e$ と置けば

$$a_{jk}{}^{i} - a_{kj}{}^{i} = \tilde{c}_{jk}{}^{i}$$

となる．従って$\tilde{c}_{jk}{}^{i}$は群Gの構造定数である(§52,(5)参照)．

(9)を証明するには，径数tに小さい増分δtを与えると

$$x(t+\delta t)\,(x(t))^{-1} = x(\delta t)$$

が成立つ．従って

$$x^{i}(\delta t) = v_{j}{}^{i}(x(t))\,(x^{j}(t+\delta t) - x^{j}(t)) + \varepsilon_{5}{}^{i}$$

となる．両辺をδtで割って$\delta t\to 0$とした極限を考えれば(9)が得られる．

これで命題A)は完全に証明された．

次の定理は命題A)の逆を与えるものである．

定理86. Uをr次元Euclid空間のある領域で，座標の原点eを含むものとする．いま領域Uにおいて解析的な函数の組

$$\overset{*}{v}_{j}{}^{i}(x) = \overset{*}{v}_{j}{}^{i}(x^{1}, \cdots, x^{r})$$

が与えられたとし，しかも行列$\|\overset{*}{v}_{j}{}^{i}(x)\|$の行列式は$U$において常に0でなくかつ$\overset{*}{v}_{j}{}^{i}(x)$は条件

$$\overset{*}{v}_{j}{}^{i}(e) = \delta_{j}{}^{i} \tag{14}$$

$$\frac{\partial \overset{*}{v}_{k}{}^{i}(x)}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \overset{*}{v}_{j}{}^{i}(x)}{\partial x^{k}} = \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^{i}\overset{*}{v}_{j}{}^{\alpha}(x)\overset{*}{v}_{k}{}^{\beta}(x) \tag{15}$$

をみたすものとする．ここで$\overset{*}{c}_{jk}{}^{i}$はある定数とする．いま

$$\overset{*}{v}_{k}{}^{i}(f)\frac{\partial f^{k}}{\partial x^{j}} = \overset{*}{v}_{j}{}^{i}(x) \tag{16}$$

という微分方程式を考えよう．関係式(15)は方程式(16)の積分可能条件(§55, A)参照)であるから定理85によって原点eの近傍Gがあって任意の$x_{0}\in G$, $f_{0}\in G$に対し初期値がx_{0}, f_{0}となる(16)の解$f(x, f_{0}, x_{0})$がGのすべての点xにおいて存在する．$f(x, y) = f(x, y, e)$と置くと

$$f(e, y) = y \tag{17}$$

となる．いまGの2元x, yの積を

$$f = xy = f(x, y) \tag{18}$$

によって定義する．ここで定義された乗法によって，Gはリー群芽となり，e

がその単位元となる．そして群芽 G の補助函数 $v_j^i(x)$ (A) 参照)は初めに与えた $\overset{*}{v}_j^i(x)$ と一致し，群芽 G の構造定数 c_{jk}^i は(15)の定数 $\overset{*}{c}_{jk}^i$ と一致する．即ち

$$v_j^i(x) = \overset{*}{v}_j^i(x), \tag{19}$$

$$c_{jk}^i = \overset{*}{c}_{jk}^i. \tag{20}$$

証明. まず第一に上に定義した積が結合律をみたすことを証明しよう．(17) によって $f(e, e) = e$ であるから，函数 $f(x, y)$ の連続性によって十分小なる e の近傍 V が存在して $x \in V, y \in V$ ならば $f(x, y) \in G$ となる．いま，$x \in V, y \in V, z \in V$ と仮定し，$u = f(x, y)$，$v = f(y, z)$，$w = f(u, z)$，$w^* = f(x, v)$ と置いて $w = w^*$ であることを証明しよう．これができれば，結合律は証明されたことになる．

これを証明するためには y, z を固定して x を変数と考えよう．函数 f の定義から $w^*(x)$ は方程式(16)の初期条件 $w^*(e) = v$ をみたす解である．$w(x)$ もやはり同じ方程式 (16) の同じ初期条件 $w(e) = v$ をみたす解であることを証明しよう．方程式 (16) の解の一意性 (定理 85 参照) によって，これが証明されると $w^*(x) = w(x)$ が証明されたことになる．

$x = e$ ならば $u = y$ となり，$w = f(y, z) = v$ となる．従って $w(x)$ と $w^*(x)$ に対する初期条件は一致する．

$w(x)$ が方程式 (16) の解であることを証明するために行列 $\|\overset{*}{v}_j^i(x)\|$ の逆行列 $\|\overset{*}{u}_j^i(x)\|$ を考え，方程式(16)を次の形に書換える．

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = u_k^i(f)\overset{*}{v}_j^k(x). \tag{21}$$

一方

$$\frac{\partial w^i}{\partial x^j} = \frac{\partial w^i}{\partial u^a}\frac{\partial u^a}{\partial x^j} = \overset{*}{u}_k^i(w)\overset{*}{u}_a^k(u)\overset{*}{u}_l^a(u)\overset{*}{v}_j^l(x) = \overset{*}{u}_k^i(w)\overset{*}{v}_j^k(x)$$

が成立つ．従って $w(x)$ は (21)の解である．これで結合律が成立つことは証明された．

G の単位元は元 e である((17)参照)．

元 y の逆元を求めるためには x についての方程式

$$f^i(x, y) = 0 \qquad (22)$$

を解かなければならない．$y=e$ のときは，この方程式はもちろん $x=e$ なる解を有する．(14)と(16)から(22)の $x=y=e$ におけるヤコビアン(函数行列式)は1に等しいことが直ちに判る．従って(22)は十分 e に近い y に対して解 x が存在する．

従って逆元の存在が証明された．

かくして G はリー群芽であることが証明されたから，命題A)によって函数 $f(x, y)$ は方程式(6)をみたす．一方 $f(x, y)$ は同時に(16)をもみたす．ところが(6)及び(16)において $x=e$ として $f(x, y)$ から $v_j{}^i(z)$ 及び $\overset{*}{v}_j{}^i(z)$ を計算できるから，直ちに $v_j{}^i(z) = \overset{*}{v}_j{}^i(z)$ であることが出る((5)及び(14)参照)．等式(19)によって方程式(8)及び(15)における構造定数は一致しなければならない．即ち $c_{jk}{}^i = \overset{*}{c}_{jk}{}^i$ である．

これで定理86は証明された．

これでリー群を構成する問題の第1段階は終ったから，第2段に移ろう．ここでの問題は方程式(8)を解くこと，即ち構造定数から補助函数 $v_j{}^i(x)$ を構成することである．方程式(8)の形自身から，初期条件(5)の下における(8)の解が一意的でないことが判る．既に注意したように，どのようにでもよいが，とにかく一つ特殊な座標系を選ばなければならない．こうすると $v_j{}^i(x)$ には条件が付加わって問題が一意的な解を有するようになる．上述の目的のための特別な座標系としては既に述べたように第1種の標準座標(§42, B)参照)をとることにする．

方程式(8)を標準座標系で解くという問題は，連立常微分方程式を解くことに帰着する．ここで用いるのに適当な手段は極く当り前のものである．函数 $v_j{}^i(x)$ は一度に単位元 e の近傍全体では見出だされず，ある曲線即ち1径数部分群の上で先ず定義される．$g(t)$ を任意の1径数部分群とすれば，標準座標系では $g^i(t) = a^i t$ という形となる．1径数部分群 $g(t)$ を一つ決めれば，$v_j{}^i(g(t))$ は一つの変数 t の函数となる．函数 $tv_j{}^i(g(t))$ は t の函数として一つの定数係数の連立線型常微分方程式を満たす．従ってそれを見出だすことは初等的な存

在定理に帰着し，簡単に解決される．

ここで第1種標準座標系を特徴付ける一つの性質を述べよう．

B)　D をリー群芽 G における2回微分可能な座標系とする．この D が第1種の標準座標系であるための必要かつ十分な条件は，座標系 D に対する補助函数 $v_j{}^i(x)$ (A)参照)が次の関係をみたすことである，

$$v_j{}^i(x)x^j = x^i. \tag{23}$$

これを証明しよう．まず D が第1種の標準座標系であるとしよう．$g(t)$ を群 G の一つの1径数部分群で，ベクトル a から生成されたものとする(§42, A)参照)．標準座標だから $g^i(t) = a^i t$ という形になる．(9)を用いると

$$v_j{}^i(at)a^j = a^i \tag{24}$$

が得られる．この式は $a = x, t = 1$ とすれば(23)式になる．

次に(23)式が成立つと仮定する．$g(t)$ をベクトル a から生成される G の1径数部分群とすれば，(9)式により

$$v_j{}^i(g(t))\ \frac{dg^j(t)}{dt} = a^i \tag{25}$$

が成立つ．(23) 式により (25)式は $g^i(t) = a^i t$ なる解を有する．(25) の解の一意性から $g^i(t) = a^i t$ である．従って座標系 D は第1種の標準座標系であることがわかった．

C)　G をリー群芽，D を与えられた2回微分可能な G の第1種標準座標系とする．更に $v_j{}^i(x) = v_j{}^i(x^1, \cdots, x^r)$ を座標系 D における補助函数(A)参照)とする．いま

$$w_j{}^i(t) = w_j{}^i(t, a) = tv_j{}^i(a^1t, \cdots, a^rt) = tv_j{}^i(at) \tag{26}$$

と置く．但しここで a は一つの固定したベクトルで at は座標が $a^i t$ の点を表わすものとする．このとき次の関係が成立つ．

$$v_j{}^i(x) = w_j{}^i(1, x), \tag{27}$$

$$w_j{}^i(0, a) = 0, \tag{28}$$

$$\frac{dw_j{}^i(t)}{dt} = \delta_j{}^i + c_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha w_j{}^\beta(t). \tag{29}$$

従って函数 $w_j{}^i(t, a)$ は変数 t の函数として連立常微分方程式 (29) の初期条件 (28) の下における解となっている．函数 $w_j{}^i(t, a)$ が見出だされたならば，(27) 式によって $v_j{}^i(x)$ を定義することができ，またそうしなければならない．これで第1種の標準座標系においては構造定数 $c_{jk}{}^i$ によって一意的に補助函数 $v_j{}^i(x)$ が定まることが証明されたことになる．

(27) 式及び (28) 式の成立つことは明らかである．そこで (29) を証明しよう．(23) 式を x^j で微分すると

$$x^k \frac{\partial v_k{}^i(x)}{\partial x^j} + v_j{}^i(x) = \delta_j{}^i \tag{30}$$

となる．(8) に x^k を掛けて k について総和すると

$$\frac{\partial v_k{}^i(x)}{\partial x^j} x^k - \frac{\partial v_j{}^i(x)}{\partial x^k} x^k = c_{\alpha\beta}{}^i v_j{}^\alpha(x) v_k{}^\beta(x) x^k = -c_{\alpha\beta}{}^i x^\alpha v_j{}^\beta(x) \tag{31}$$

となる ((23) 及び §52, (6) 参照)．(30) 及び (31) から

$$\frac{\partial v_j{}^i(x)}{\partial x^k} x^k + v_j{}^i(x) = \delta_j{}^i + c_{\alpha\beta}{}^i x^\alpha v_j{}^\beta(x)$$

が得られる．この式で $x = at$ とすれば

$$\frac{\partial v_j{}^i(at)}{\partial x^k} t a^k + v_j{}^i(at) = \delta_j{}^i + c_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha t v_j{}^\beta(at) \tag{32}$$

となる．直ちに判るように，この式の左辺は $w_j{}^i(t, a)$ を t で微分したものである．従って (32) は書直すと (29) になり，従って (29) は証明された．

次の定理は命題 C) の逆を与えるものである．

定理 87. $\overset{*}{c}_{jk}{}^i$ を定数の組で次の関係式をみたすものとする．

$$\overset{*}{c}_{jk}{}^i = -\overset{*}{c}_{kj}{}^i, \tag{33}$$

$$\overset{*}{c}_{is}{}^p \overset{*}{c}_{jk}{}^s + \overset{*}{c}_{js}{}^p \overset{*}{c}_{ki}{}^s + \overset{*}{c}_{ks}{}^p \overset{*}{c}_{ij}{}^s = 0. \tag{34}$$

このとき連立微分方程式

$$\frac{d\overset{*}{w}_j{}^i}{dt} = \delta_j{}^i + \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha \overset{*}{w}_j{}^\beta \tag{35}$$

を考えよう．但しここで a はある一つの定まったベクトルで $\overset{*}{w}_j{}^i$ は変数 t の未

知函数である.

方程式(35)は定数係数の線型常微分方程式だから t および a のすべての値に対し解析的な解が存在する. いま $\overset{*}{w}_j{}^i(t, a)$ を初期条件

$$\overset{*}{w}_j{}^i(0, a) = 0 \tag{36}$$

をみたす(35)の解とする. このとき

$$\overset{*}{v}_j{}^i(x) = \overset{*}{w}_j{}^i(1, x) \tag{37}$$

と置けば $\overset{*}{v}_j{}^i(x)$ は関係式(14)及び(15)を満足する. 但し e は座標の原点である. 更にそれのみならず

$$\overset{*}{v}_j{}^i(x)x^j = x^i \tag{38}$$

が成立つ.

証明. (14)式の成立つことを示すには, 方程式(35)を $a = e$ のとき解けばよい. もちろんこの解は $\overset{*}{w}_j{}^i(t) = \delta_j{}^i t$ であるから, $\overset{*}{v}_j{}^i(e) = \delta_j{}^i$ となる((37)参照).

(15)と(38)は全く同じ方法で証明される. この方法をはっきりさせるために, 初めに(38)という簡単な方を先にやろう.

$$h^i(t) = \overset{*}{w}_j{}^i(t, a)a^j - ta^i \tag{39}$$

と置き $h^i(t) = 0$ なることを示そう. これができれば, $h^i(1) = 0$ であるから(38)が証明されたことになる.

$$h^i(0) = 0 \tag{40}$$

が成立つことは明らかである. 次に $h^i(t)$ の導函数を求めよう. (35)及び(33)を使えば

$$\frac{dh^i(t)}{dt} = (\delta_j{}^i + \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha \overset{*}{w}_j{}^\beta(t, a))a^j - a^i = \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha \overset{*}{w}_j{}^\beta(t, a)a^j$$

$$= \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha(\overset{*}{w}_j{}^\beta(t, a)a^j - ta^\beta)$$

となる. 従って函数 $h^i(t)$ は線型微分方程式

$$\frac{dh^i}{dt} = \overset{*}{c}_{\alpha j}{}^i a^\alpha h^j \tag{41}$$

をみたす. 一方初期条件 $h^i(0) = 0$ の下で(41)の解としてはもちろん $h^i(t) = 0$

がある．従って(41)の解の一意性によって $h^i(t) = 0$ を得る((40)参照)．

(15)を証明するために，

$$h_{jk}{}^i(t) = \frac{\partial \overset{*}{w}_k{}^i(t, a)}{\partial a^j} - \frac{\partial \overset{*}{w}_j{}^i(t, a)}{\partial a^k} - \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i \overset{*}{w}_j{}^\alpha(t, a)\, \overset{*}{w}_k{}^\beta(t, a) \tag{42}$$

と置き，$h_{jk}{}^i(t) = 0$ なることを証明しよう．これができれば，$h_{jk}{}^i(1) = 0$ であるから(15)が証明されたことになる．

$\overset{*}{w}_j{}^i(0, a) = 0$ であるから $\partial \overset{*}{w}_j{}^i(0, a)/\partial a^k = 0$ であり，従って

$$h_{jk}{}^i(0) = 0 \tag{43}$$

である．次に $h_{jk}{}^i(t)$ の導函数を計算しよう．(35)を a^j で微分すると

$$\frac{\partial^2 \overset{*}{w}_k{}^j(t, a)}{\partial t \partial a^j} = \overset{*}{c}_{j\beta}{}^i \overset{*}{w}_k{}^\beta(t, a) + \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha \frac{\partial \overset{*}{w}_k{}^\beta(t, a)}{\partial a^j} \tag{44}$$

が得られる．(35)及び(44)から

$$\frac{dh_{jk}{}^i}{dt} = \overset{*}{c}_{j\beta}{}^i \overset{*}{w}_k{}^\beta + \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha \frac{\partial \overset{*}{w}_k{}^\beta}{\partial a^j} - \overset{*}{c}_{k\beta}{}^i \overset{*}{w}_j{}^\beta - \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha \frac{\partial \overset{*}{w}_j{}^\beta}{\partial a^k} - \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i (\delta_j{}^\alpha +$$

$$\overset{*}{c}_{\gamma\delta}{}^\alpha a^\gamma \overset{*}{w}_j{}^\delta)\, \overset{*}{w}_k{}^\beta - \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i \overset{*}{w}_j{}^\alpha (\delta_k{}^\beta + \overset{*}{c}_{\gamma\delta}{}^\beta a^\gamma \overset{*}{w}_k{}^\delta)$$

が得られる．この式で同類項をまとめて(33)及び(34)を使って書直すと

$$\frac{dh_{jk}{}^i}{dt} = \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha \left(\frac{\partial \overset{*}{w}_k{}^\beta}{\partial a^j} - \frac{\partial \overset{*}{w}_j{}^\beta}{\partial a^k} - \overset{*}{c}_{\gamma\delta}{}^\beta \overset{*}{w}_j{}^\gamma \overset{*}{w}_k{}^\delta \right) = \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha h_{jk}{}^\beta$$

となる．従って函数 $h_{jk}{}^i(t)$ は微分方程式

$$\frac{dh_{jk}{}^i}{dt} = \overset{*}{c}_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha h_{jk}{}^\beta \tag{45}$$

の初期条件(43)の下での解である．一方この微分方程式はもちろん $h_{jk}{}^i = 0$ を解として持つから，解の一意性によって $h_{jk}{}^i(t) = 0$ である．

これで定理 87 は証明された．

構造定数からリー群芽を構成する問題の第 2 段はこれで終った．そこでこの構成をまとめて次の決定的な形で述べよう．

定理 88. $c_{jk}{}^i$ を§52 の (11)及び(12) なる関係をみたす定数の組とする．これに対して次の連立微分方程式

$$\frac{dw_j^i}{dt} = \delta_j^i + c_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha w_j^\beta \tag{46}$$

を考える．ここで a はある定まったベクトルで，w_j^i は変数 t の未知函数である．いま $w_j^i(t, a)$ で方程式(46)の，初期条件が

$$w_j^i(0, a) = 0 \tag{47}$$

である解を表わすことにし，

$$v_j^i(x) = w_j^i(1, x) \tag{48}$$

と置く．

(46)は定数係数の線型微分方程式だから，任意のベクトル a に対し，変数 t のすべての値に対して解析的な解が存在する．従って $v_j^i(x)$ は任意の点，即ち Euclid 空間全体で定義された解析的な函数である．

次に連立偏微分方程式

$$v_k^i(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^j} = v_j^i(x) \tag{49}$$

を考える．この方程式は積分可能条件をみたし，座標の原点 e においては行列 $\| v_j^i(x) \|$ の行列式は1に等しいから，e の十分小なる近傍 G が存在して，$x \in G$, $y \in G$ ならば方程式(49)の解 $f(x, y)$ で初期条件

$$f(e, y) = y \tag{50}$$

をみたすものが唯一つ存在する．G の任意の2点 x, y に対してその積を

$$xy = f(x, y) \tag{51}$$

で定義する．このようにして定義された積によって G はリー群芽となり，点の座標は G の第1種標準座標となる．またこの座標における G の構造定数は初めの $c_{jk}{}^i$ と一致する．更に第1種標準座標をとったときの構造定数が $c_{jk}{}^i$ と一致する任意のリー群芽を G^* とすれば，G^* において積を定義する函数 $f^*(x, y)$ の座標成分は上に得られた $f(x, y)$ のそれと一致する．

従って（$c_{jk}{}^i$ を与えたときそれを構造定数として持つ）リー群芽の存在と一意性が証明された．更に上の $f(x, y)$ の定義から $f(x, y)$ は**解析函数**である．何となれば $f(x, y)$ は（定数係数の線型方程式の解として）解析的な $v_j^i(x)$ を係数とする微分方程式の解だからである．従って任意のリー群芽には解析的な座標を

入れることができる.

定理 88 は A), B), C), 及び定理 86 及び定理 87 から直ちに証明される.

上に述べた事柄をリー代数の言葉で言い直すと, 次のようになる.

定理 89. R を任意の実リー代数とする(定理 48 参照). これに対しリー群芽 G が存在して G のリー代数は R と同型になる (定義 82 参照). 更に G 及び G' を二つのリー群芽とし R 及び R' をそれぞれのリー代数とする. いま, リー代数 R から R' の上への同型写像 g が存在すると仮定すれば, リー群芽 G から G' の上への局所同型写像(§23, H)参照) h が存在して, それに対応するリー代数 R から R' 上への同型写像(定理 84 参照)が g と一致する. かかる h は同値なるものを除いては唯一つしか存在しない.

証明. リー群芽 G をそのリー代数 R から構成するには, R の基底を一つとり, それに関する構造定数を考えればよい. リー代数 R の構造定数は §52 の (11) 及び (12) という関係をみたす故, それから定理 88 によってリー群芽 G を構成することができる. 二つリー代数 R 及び R' に与えられた同型写像 g で互に移り得る基底を取れば, R 及び R' の構造定数は一致する. G 及び G' においてこの基底に対応する第 1 種標準座標系をとれば, これらの座標系では, 積を定める函数 $f(x, y)$ と $f'(x, y)$ は構造定数が一致するから同一の函数となる (定理 88 参照). 従って G の各元 x に, x の座標と同じ座標を持つ点 $x' \in G'$ を対応させれば, この写像 h は必然的に同型写像となる. 同型写像 h の一意性は第 1 種標準座標ではすべての自己同型写像が 1 次写像の形に書け, 従って群芽 G' の恒等写像でない自己同型写像にはリー代数 R' の恒等写像でない自己同型写像が対応することから証明される (§43, D) 参照).

これで定理 89 は証明された.

定理 89 によって, リー群芽の研究は完全にリー代数のそれと一致することが確かめられた.

上に述べたリー代数からのリー群芽の構成はどちらかというと原理的な点で価値のあるものであることを注意して置こう. 実際には間接的な手段でリー代数に対応するリー群を見出だす方が便利である. その特別な場合として次の結

果が得られる.

D) すべての可換な r 次元リー群芽は r 次元ベクトル群即ち, r 次元ベクトル空間の加法群に局所同型である.

例 96. 2次元リー群の構造.

R を2次元の実リー代数, p 及び q を1次独立な R の二つの元とし, $[p, q] = r$ とする. 容易に判るように, R の任意の二つの元 a, b に対し, 実数 α が存在して, $[a, b] = \alpha r$ となる. いま, $r = 0$ なるときと $r \neq 0$ なる場合を分けて考えよう. $r = 0$ ならば R の任意の二つの元の交換子は0であるから, リー代数 R は可換である. $r \neq 0$ なるときは $[r, t] = r$ となる R の元 t が存在する. ベクトル空間 R の基底として r 及び t をとることにしよう. これに対する R の構造定数は $c_{12}{}^1 = 1$, $c_{12}{}^2 = 0$ である. このように2次元のリー代数で同型でないものは二つしか存在しない.

リー代数 R が可換ならば対応するリー群も可換である.

リー代数 R が可換でないときは, それに対応するリー群の一つは次の関係で与えられる.

$$f^1 = x^1 + y^1 e^{-x^2},\ f^2 = x^2 + y^2.$$

このリー群 G の元 x で第2座標 x^2 が0となるものの全体 N は G の正規部分群を作る. この正規部分群 Nに対応する R のイデアルは αr の形のベクトル全体から成る. ここで α は任意の実数である. [G は直線上の1次変換 $x \to ax + b$ の作る群の単位元成分と同型である.]

例 97. 連結可換リー群の構造.

G を連結可換リー群とする. このとき G は, いくつかの D と同型な部分群と, いくつかの K と同型な部分群の直積に分解する. 但し D は実数全体の作る加法位相群で, K は整数全体が作る部分群による D の剰余群である.

実際 H を G と同じ次元の一つのベクトル空間とする. G と H は局所同型であるから(D) 参照), 単連結な群 H は G の普遍被覆群である (定義46参照). 従って群 G は剰余群 H/N と同型である. ここで N は群 H のディスクリートな部分群である. いま, $e_1, \cdots, e_s$ を群 N の生成元で例33において構成されたもの

とする. H の1次独立なベクトルの組 $e_1, \cdots, e_s$ にベクトル $e_{s+1}, \cdots, e_n$ を補って H の基底にすることができる. この基底に対する空間 H の座標を考えれば, H/N が s 個の K と同型な群と, $n-s$ 個の D と同型な群の直和であることは明らかである.

§57. 部分群と準同型写像の構成

前の§ではリー群芽 G とそのリー代数 R との間の完全な対応を確立した. この§では G の部分群, 正規部分群, 剰余群とリー代数 R のそれに応ずる対象の間の1対1の対応を詳しく述べよう.

リー群芽 G に対するこれらの諸概念に対しリー代数 R において対応する諸概念が存在することは既に述べた(§53参照). ここでは我々は逆にリー代数から出発しよう. 従ってこの§での考察はすべて局所的な性質のものであることに注意されたい.

定理 90. G をリー群芽, R をそのリー代数とし, S を R の部分代数とする. このとき群芽 G の部分群芽 H (§23, I)参照) が存在してそれに対応する R の部分代数(定理83参照) が S と一致する. またかかる部分群芽は唯一つしか存在しない. このとき部分群芽 H と部分代数 S とは**互に対応する**といい, $H \rightleftarrows S$ という記号で表わす.

証明. r 及び s をそれぞれ R 及び S の次元とする. いま, R の基底を R の元 a が S に属するのはその座標が

$$a^{s+1} = 0, \cdots, a^r = 0 \qquad (1)$$

をみたすとき, そのときに限るようにとる. この R の基底に対する G の第1種標準座標系をとる. G 及び R のこの座標系を証明中ずっと一つ固定して置く.

部分群 H が存在すれば, それはこの座標系では1次方程式で定められる(定理62参照). 部分群 H は部分代数 S に対応しなければならないから, H は方程式

$$x^{s+1} = 0, \cdots, x^r = 0 \qquad (2)$$

で定義される. 即ち元 x が部分群 H に含まれるための必要十分条件はその座

標 x^i が条件(2)をみたすことあでる．従って H の一意性は証明された．次に存在の証明に移ろう．

いま，G の元 x でその座標 x^i が条件(2)をみたすものの全体の集合を H で表わし，H が G の部分群芽であることを証明しよう．そのためには $x \in H, y \in H$ ならば $xy \in H, x^{-1} \in H$ であることを示せばよい．この証明は我々の選んだ座標系において積の法則を与える函数 $f(x, y)$ を計算すれば直ちにできる(§52,(1)参照)．

いま $c_{jk}{}^i$ を G または同じことであるが R の構造定数としよう．関係式(1)が部分代数を定義することから構造定数は次の条件をみたしている．

$$i>s,\ j\leqq s,\ k\leqq s \text{ ならば } c_{jk}{}^i = 0. \tag{3}$$

以下の計算で，どの添数がどの範囲を動くかを，その都度断るのを避けるために，次のように約束する．1から s までの値をとる添数には(′)，$s+1$ から r までの値をとる添数には(″)を附けることにする．この約束によれば上の(3)は次のように書かれる．

$$c_{j'k'}{}^{i''} = 0. \tag{4}$$

全く同様に S に対応する G の部分群 H の点を表わす文字にも(′)を附けることにする．

次に§56の(46)という連立微分方程式を $a = a' \in S$ に対して解いて見よう．そのために(46)の方程式を互に関係のない次の二つの組に分ける：

$$\frac{dw_{j'}{}^i}{dt} = \delta_{j'}{}^i + c_{\alpha'\beta}{}^i a^{\alpha'} w_{j'}{}^\beta, \tag{5}$$

$$\frac{dw_{j''}{}^i}{dt} = \delta_{j''}{}^i + c_{\alpha'\beta}{}^i a^{\alpha'} w_{j''}{}^\beta. \tag{6}$$

連立方程式(5)を解くことは次の連立方程式を解くことに帰着する．

$$\frac{d\overset{*}{w}_{j'}{}^{i'}}{dt} = \delta_{j'}{}^{i'} + c_{\alpha'\beta'}{}^{i'} a^{\alpha'} \overset{*}{w}_{j'}{}^{\beta'}. \tag{7}$$

何となれば条件(4)によって(7)の解 $\overset{*}{w}_{j'}{}^{i'}$ があれば

$$w_{j'}{}^{i'} = \overset{*}{w}_{j'}{}^{i'}, \tag{8}$$

$$w_{j'}{}^{i''} = 0. \tag{9}$$

と置けば $w_{j'}{}^{i}$ は(5)の解となる．従って§56, (46)の解の一意性によって

$$w_{j'}{}^{i''}(t, a') = 0 \tag{10}$$

となる．これから直ちに

$$v_{j'}{}^{i''}(x') = 0 \tag{11}$$

が得られる(§56, (48)参照)．

(8)から得られる函数 $v_{j'}{}^{i'}(x')$ は，リー代数が S であるリー群芽の補助函数となっていることを注意しよう．それは，$v_{j'}{}^{i'}(x') = \overset{*}{w}_{j'}{}^{i'}(1, x')$ であり，$\overset{*}{w}_{j'}{}^{i'}(t, a')$ は連立微分方程式(7)の解で，(7)の定数 $c_{j'k'}{}^{i'}$ はリー代数 S の構造定数だからである．

次に§56の(49)の解を考えよう．我々にとって問題なのは $f(x', y')$ のみであって $f^{i''}(x', y') = 0$ なることが証明したいのである．何故ならば，これができれば $x'y' = f(x', y') \in H$ が証明されたことになるからである．y' を固定すると $f(x', y')$ は $x^{i'}$, $i' = 1, \cdots, s$ のみの函数であり，それを見出だすには連立微分方程式

$$v_k{}^{i}(f) \frac{\partial f^k}{\partial x^{j'}} = v_{j'}{}^{i}(x') \tag{12}$$

を $f(e, y') = y'$ という初期条件の下で解けばよいのである．方程式(12)は§15 (1)の形に直せるから（前に定理85の中で注意したように），それが積分可能条件をみたすかどうかは判らなくても解が一つ以上はないことはいえる．(12)を解くためには，まず

$$v_{k'}{}^{i'}(f^*) \frac{\partial f^{*k'}}{\partial x^{j'}} = v_{j'}{}^{i'}(x') \tag{13}$$

を初期条件 $f^{*i'}(e, y') = y'^{i'}$ の下で解く．(13) は上に注意したようにそこに表われる函数 $v_{j'}{}^{i'}(z')$ があるリー群芽の補助函数であるから，解を有する（§56, A) 参照)．条件 (11) を使えば容易に判る通り $f^{i'}(x', y') = f^{*i'}(x', y')$, $f^{i''}(x', y') = 0$ で定義した $f(x', y')$ は (12) の解である．(12)の解の一意性から $f^{i''}(x', y') = 0$ を得る．従って $x'y' = f' \in H$ である．

$(x')^{-1} \in H$ を証明するには，第 1 種標準座標では x^{-1} の座標は $-x^i$, $i-1, \cdots, r$，であることに注意すれば十分である．x^{-1} の座標がこのようになることは，

1径数部分群を考えれば直ちに解る．従って$(x')^{-1} = z' \in H$である．

これで定理90は証明された．

A) Gをリー群芽とし，ある一つの第1種の標準座標が固定されているものとする．$x \in G$に対し$\varphi_x(z) = xzx^{-1}$で定義される自己同型写像φ_xは一つの行列$\| l_j{}^i(x) \|$で定められる．即ち，

$$(\varphi_x(z))^i = l_j{}^i(x) z^j \tag{14}$$

となる．接ベクトルaにより生成される1径数部分群上の点$x^i = a^i t$に対して，行列$\| l_j{}^i(ta) \|$は次の線型常微分方程式をみたす．

$$\frac{dl_j{}^i(ta)}{dt} = c_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha l_j{}^\beta(ta). \tag{15}$$

$l_j{}^i(ta)$はもちろん

$$l_j{}^i(0, a) = \delta_j{}^i \tag{16}$$

という初期条件をみたす．

これを証明するために，行列$\| l_j{}^i(x) \|$は，リー群芽Gの自己同型写像φ_xに対応するリー代数Rの自己同型写像l_xの行列であることに注意しよう．Rの1次変換の作る1径数部分群l_{ta}の接ベクトルはRの1次変換p_aである（§54, F）参照）．従って§54, B)により1次変換l_{ta}は微分方程式

$$\frac{d}{dt} l_{ta} = p_a l_{ta} \tag{17}$$

をみたす．この方程式を座標成分で書くと(15)が得られる．

定理91. Gをリー群芽，Hをその部分群芽，RをGのリー代数，SをHに対応するRの部分代数とする．記号：$H \to S$（定理83参照）．Sがリー代数RのイデアルならばHはGの正規部分群芽である．SがRの中心に含まれるイデアルならばHはGの中心に含まれる正規部分群である．またSがリー代数Rの中心ならばHはリー群芽Gの中心である．

証明． G及びHの次元をそれぞれr及びsとする．Gの第1種標準座標系で部分群芽Hが方程式

$$x^{s+1} = 0, \cdots, x^r = 0 \tag{18}$$

で定義されるものをとる．このとき対応するRの座標系をとれば，部分代数S

は方程式

$$a^{s+1} = 0, \cdots, a^r = 0 \tag{19}$$

で定義される.

定理 90 の証明と同様にして，1, …, s なる範囲を動く添数には (′) を附け，$s+1, \cdots, r$ なる範囲を動く添数には (″) を附けることにする．また H の元にも (′) を附けることにする.

定理を証明することは，部分群芽 H の元が G の内部自己同型により，どのような変化を受けるかという問題に帰着する．そのためには A) で示した方法により行列 $\| l_j{}^i(x) \|$ を計算すればよい.

G の座標を上のように都合よくとったから，S が R のイデアルであるならば構造定数 $c_{jk}{}^i$ は次の条件

$$c_{jk'}{}^{i''} = 0 \tag{20}$$

をみたす．連立微分方程式 (15) を積分するためにこれを次の二つの無関係な連立方程式に分ける：

$$\frac{dl_{j'}{}^i(ta)}{dt} = c_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha l_{j'}{}^\beta(ta), \tag{21}$$

$$\frac{dl_{j''}{}^i(ta)}{dt} = c_{\alpha\beta}{}^i a^\alpha l_{j''}{}^\beta(ta). \tag{22}$$

(21) を解くためにまず次の方程式

$$\frac{dl^*{}_{j'}{}^{i'}(ta)}{dt} = c_{\alpha\beta'}{}^{i'} a^\alpha l^*{}_{j'}{}^{\beta'}(ta) \tag{23}$$

を解く．容易に判るように条件 (20) を使えば，(23) の解 $l^*{}_{j'}{}^{i'}$ を使って $l_{j'}{}^{i'}(ta) = l^*{}_{j'}{}^{i'}(ta)$，$l_{j'}{}^{i''}(ta) = 0$ と置けば，この $l_{j'}{}^i(ta)$ は (21) の解である．従って

$$l_{j'}{}^{i''}(x) = 0 \tag{24}$$

でなければならない.

S が中心に含まれる場合は関係式 (20) を $c_{jk'}{}^i = 0$ で置換える．このとき，(21) は $l_{j'}{}^i(ta) = \delta_{j'}{}^i$ という解を有する（条件 (16) 参照）．従って

$$l_{j'}{}^i(x) = \delta_{j'}{}^i \tag{25}$$

となる.

(24)式から $\varphi_x(z')\in H$ ((14)参照)となる．即ちこの場合は，H は G の正規部分群芽である．(25)式からは $\varphi_x(z')=z'$ ((14)参照)が得られる．即ちこの場合は，H は中心に含まれる正規部分群芽である．

最後に S は R の中心，H_0 を G の中心とし，$H_0\to S_0$ とする．上に証明したことから $H\subset H_0$ で従って $S\subset S_0$ である．S_0 は中心に含まれるイデアルだから(定理83参照) $S_0\subset S$ である．従って $S_0=S$ でまた $H_0=H$ である．

これで定理91は証明された．

定理 92. G 及び G' を二つのリー群芽とし，R 及び R' をそれぞれ G, G' のリー代数とする．更に h はリー代数 R から R' の上への準同型写像とすれば，リー群芽 G からリー群芽 G' の上への局所準同型写像 f (§23, K) 参照)が存在して，f に対応する R から R' の上への準同型写像(定理84参照)が h に一致する．しかもかかる準同型写像 f はすべて同値 (§23, K) 参照) である．我々は写像 f 及び h が**互に対応する**といい $f\rightleftarrows h$ と書く．

証明. S を準同型写像 h の核とする．定理90及び91により S はリー代数 R のイデアルで，G の正規部分群芽 N に対応する：$N\rightleftarrows S$．いま，$G^*=G/N$ と置き，f^* を G から G^* の上への自然準同型写像とする．R^* を G^* のリー代数とし，h^* を準同型写像 f^* に対応するリー代数 R から R^* の上への準同型写像とする(定理84参照)．このとき準同型写像 h^* の核は S である．何となれば f^* の核は N で，$N\rightleftarrows S$ であるから(定理90参照)．

準同型写像 h^* によりリー代数 R のイデアル S による一つの剰余類 A は R^* の一つの元 a^* に写される．また準同型写像 h により剰余類 A は R' の一つの元 a' に写される．いま，$a'=h'(a^*)$ と置く．容易に判るように h' はリー代数 R^* から R' の上への同型写像であって

$$h(a)=h'(h^*(a)) \tag{26}$$

なる関係を満足する．ここで a は R の任意の元である．定理89によりリー群芽 G^* から G' の上への同型写像 f' で対応するリー代数 R^* から R' の上への写像が h' と一致するものが唯一つ存在する：$f'\to h'$．いま，

$$f(x)=f'(f^*(x)) \tag{27}$$

と置く．$f^* \to h^*$, $f' \to h'$ であるから，(26)及び(27)によって

$$f \to h \tag{28}$$

が得られる(§53, E)参照)．

いま，(28) を満足する二つの準同型写像 f 及び f'' が存在したとすれば，f 及び f'' の核は一致するから，これにより群芽 G' の恒等写像でない自己同型写像が得られる．一方これに対応するリー代数 R' の自己同型写像は恒等写像であるから定理 89 に反する[従ってかかる f は一つしか存在しない]．

これで定理 92 は証明された．

次の二つの例は，この§に述べたことが局所的性質のものであることを示すものである．

例 98. G^2 を 2 次元の**トーラス群**とする．G^2 の元は二つの実数 x^1 及び x^2 の組で定められる．但しそのとき x^i と整数の差しかない x'^i は同じものと見るのである．二つの元 x, y の積 $f = xy$ は $f^1 = x^1 + y^1$, $f^2 = x^2 + y^2$ で定義される．但しここで等号は mod 1 の合同式の意味である．群 G^2 は大局的なリー群である．そのリー代数を R^2 としよう．G^2 の 1 径数部分群芽 $x^1(t) = a^1t$, $x^2(t) = a^2t$ を考えよう．但しここで a^1/a^2 なる比は無理数であるとする．部分群芽 $\{x(t)\} = H$ には R^2 の部分代数 S が対応する．部分代数 S に対応する大局的な (閉) 部分群は存在しないことを証明しよう．

いま，このような部分群 H^* が存在したと仮定しよう．単位元の近傍 U では部分群 H^* は部分代数 S によって完全に定まるから，U においては H 及び H^* は一致する．H^* は大局的な部分群だから，このことから任意の t に対する元 $x(t)$, $x^1(t) = a^1t$, $x^2(t) = a^2t$ をすべて含まなければならない．このとき a^1/a^2 が無理数であることから，H^* は G^2 の中で稠密な集合であることが容易に結論される．所が H^* は閉じているから $H^* = G^2$ となるが，一方 H^* は 1 次元，G^2 は 2 次元だから矛盾を生ずる．

群 G^2 は単連結でなく，我々が G^2 の代りにその普遍被覆群 $\tilde{G}^2$(定義 46 参照) をとってそこで考えれば，すべてがうまく行くことを注意しておく．

しかし次の例は単連結なリー群でも大局的な部分群と部分代数との間には 1

対1の対応が存在しないことを示すものである[1]).

例 99. G を絶対値1の4元数が作る乗法群とし，R をそのリー代数とする．また H を $\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ の形の4元数の全体が作る G の1次元部分群とする．群 $G \times G$ は2次元トーラス群である部分群 $H \times H$ を含む．$H \times H$ の元は二つの mod 1 で定まる径数 x^1, x^2 により $(\cos 2\pi x^1 + i \sin 2\pi x^1, \cos 2\pi x^2 + i \sin 2\pi x^2)$ と書かれる．いま，$x^l = a^l t, l = 1, 2$ で定められる $H \times H$ の1径数部分群を考える．いま，比 a^1/a^2 が無理数だとしよう．このとき上の例で見たように，この1径数部分群 L は $H \times H$ の中で稠密である．L の径数 t をある有界な範囲に限って考えると，$H \times H \subset G \times G$ の1次元の部分群芽 H' が得られる．H' に対応するリー代数 $R + R$ の部分代数を S' としよう．然らば，リー代数 $R + R$ の部分代数 S' に対応する大局的な部分群は，単連結なリー群 $G \times G$ の中に存在しない．

§58. 可解及び準単純リー代数

これ迄の§の結果により，リー群芽の研究は完全に実リー代数の研究に帰着することになった．リー代数の更に詳しい研究はその**随伴リー代数**(§54, E)参照)を調べることによってなされる．リー代数 R の各元 a に対し R をそれ自身の中へ写す1次変換 p_a が対応する．p_a は $p_a(x) = [a, x]$ で定義される．1次変換 p_a の固有値及び固有ベクトルを調べ，かつそれらが a によりどのように変るかを見ることがリー代数の研究の主な方法である．一般には固有ベクトルは複素ベクトルであるから，実ベクトル空間 R を同じ次元の複素ベクトル空間 $[R]$ の中に入っていると考える必要がある．このようにして我々は必然的に**複素リー代数の理論**を考えざるを得ない．任意の実リー代数 R には一意的に一つの複素リー代数 $[R]$——R の**複素化**が対応する．初めの実リー代数 R を複

訳註 1) この本では，位相群（リー群でも）の部分群というときは閉じたもののみを考えている．上の例は部分代数には大局的な閉じた部分群が対応しないことがあるということを示す．リー群では閉部分群の代りに部分多様体であるような部分群のみを考えれば，リー代数の部分代数と大局的部分群の間の1対1対応が成立つ．このことについては文献追加〔103〕参照．尚この意味の部分群と部分群芽の関係については〔144〕参照．

素リー代数 $[R]$ の**実形**という．このとき同型でない幾つかの実リー代数が同型な複素化を有することがある．従って複素リー代数はいくつかの異なる実形を有することがある．一方，任意の複素リー代数が実形を有するかどうか，即ち，ある実リー代数の複素化になっているかどうかは *a priori* には明らかでない．

リー代数の理論でまず第一に考えられる自然な問題は，リー代数を完全に分類できるかどうかという問題である．まず第一にリー代数の二つの大きな類がとり出される．これらはその性質が相当に異なり，ある意味で反対の性格を持つもので，一つは**可解**リー代数，他の一つは**準単純**リー代数である．可解リー代数は可換リー代数による拡大を繰返して得られるものであるが，準単純リー代数は可換リー代数と少しも似た所がない．任意のリー代数 A は可解リー代数と準単純リー代数から構成される．即ち，A には一つの可解なイデアル S が存在して剰余リー代数 A/S は準単純となる．このような弱い意味で任意のリー代数の研究は可解及び準単純リー代数の研究に帰着される．ちょっと見た所では可解リー代数の方が準単純リー代数よりずっと簡単のように見えるけれども，実はそうではない．当分可解リー代数を完全に分類することに成功する見込みは全くないと言ってよい．これに反し準単純リー代数は完全に分類されているのである．この完全な分類は Killing によって行なわれたもので，それ自身恐らくリー代数の理論において最も興味のある，また最も重要な結果である．リー代数が可解または準単純であるということは任意の体の上のリー代数について定義できる．容易に証明されるように，実リー代数 R とその複素化とは同時に可解または準単純となる．Killing の結果は複素準単純リー代数に対する分類である．任意の複素準単純リー代数は可換でない単純リー代数の直和に分解される．そして可換でない単純複素リー代数は完全に分類される．即ち，可換でない単純複素リー代数は四つの無限系列をなすリー代数

$$A_n,\ n\geqq 1;\quad B_n,\ n\geqq 2;\quad C_n,\ n\geqq 3;\quad D_n,\ n\geqq 4,$$

と五つの例外リー代数

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$$

より成る．この結果はそれだけではすぐにリー群の分類を与えない．リー群の

分類には実リー代数の分類が必要だからである．複素準単純リー代数の分類から実準単純リー代数の分類を導くのは難かしい問題で，複素準単純リー代数の分類に劣らず重要なものである．任意の複素準単純リー代数は実形を有し，かつこの実形の数は有限でありすべて知られている (Cartan〔7〕, Gantmacher〔10〕参照)．これらの問題の内すべての実準単純リー代数を分類する問題は非常に困難なもので本書では取扱わない．我々は第一に(リー群に対応するから)実リー代数のみに関心を持っており，複素リー代数は実リー代数の研究のための手段としてのみ考えるのであるから本書ではコンパクト・リー群に対応する実準単純リー代数の分類のみを扱うことにし，他のリー代数の分類には立入らない．コンパクト・リー群に対応する実リー代数を我々は**コンパクト・リー代数**という．この分類は次の最終章において行なう．ここでは我々は可解及び準単純リー代数の定義と実リー代数とその複素化の間の関係について最も簡単な事柄を述べることにする．

A)　R を任意の体 K 上のリー代数とし，S を R の部分代数，T を R のイデアルとする．このとき，リー代数 $(S+T)/T$ は $S/(S\frown T)$ と同型である．

φ を $S+T$ から $(S+T)/T$ の上への自然準同型写像とする．$\varphi(S)=(S+T)/T$ で準同型写像 φ (を S 上に限定したもの)の核は $S\frown T$ である．従って A) は証明された(§53, D)参照)．

定義 49.　任意の体 K 上のリー代数 R は部分代数の減少列

$$R_0=R,\ R_1,\ \cdots,\ R_{n-1},\ R_n=\{0\} \tag{1}$$

が存在して $i=0,\cdots,n-1$ に対しリー代数 R_{i+1} は R_i のイデアルで剰余リー代数 R_i/R_{i+1} が可換なとき**可解**であるという．リー代数 R が 0 以外の可解イデアルを含まないときに R を**準単純** [又は**半単純**] リー代数という．

1次元のリー代数は単純 [§53, A)参照] であるが，それ自身可解であるから準単純でないことに注意しよう．次元が1より大である任意の単純リー代数は可換でなく，準単純である．

B)　R を任意の体 K 上のリー代数とする．R が可解ならば，その部分代数及び剰余代数はすべてまた可解である．また剰余代数 R/S が可解となる可解

イデアル S を有するリー代数 R は，それ自身，可解である.

命題 B) を証明しよう. 初めに R が可解であるとし，(1) をその可解であることを定める部分代数の列としよう. いま，S を R の任意の一つの部分代数とする. $S_i = S \frown R_i$ とすれば S_i/S_{i+1} は可換であることを示そう. これがいえれば，S が可解であることは証明されたことになる.

$$S_{i+1} = S_i \frown R_{i+1}, \quad S_i + R_{i+1} \subset R_i$$

が成立ち，従って命題 A) を使えば更に

$$(S_i + R_{i+1})/R_{i+1} \cong S_i/(S_i \frown R_{i+1}) = S_i/S_{i+1}$$

が成立つ. リー代数 R_i/R_{i+1} が可換故，その部分代数である $(S_i + R_{i+1})/R_{i+1}$，従って S_i/S_{i+1} が可換である. 次に S を R のイデアルとしてリー代数 $R/S = R^*$ が可解であることを証明しよう. φ を R から R^* への自然準同型写像とし

$$\varphi(R_i) = R_i^*$$

と置く. このとき

$$\begin{aligned}
R_i^*/R_{i+1}^* &= (R_i + S)/(R_{i+1} + S) = (R_i + R_{i+1} + S)/(R_{i+1} + S) \\
&\cong R_i/(R_i \frown (R_{i+1} + S)) = R_i/(R_{i+1} + R_i \frown S) \\
&\cong (R_i/R_{i+1})/((R_{i+1} + R_i \frown S)/R_{i+1}),
\end{aligned}$$

だからリー代数 R_i^*/R_{i+1}^* はリー代数 R_i/R_{i+1} のある剰余代数と同型で，従って可換である. これで R/S の可解であることが証明された.

次に S をリー代数 R のイデアルとし S 及び R/S は可解であるとしよう. いま $R_0^* = R/S, R_1^*, \cdots, R_m^* = \{0\}$ を R/S の可解性を定義する部分代数の列とし，$S_0 = S, S_1, \cdots, S_n = \{0\}$ を S に関する同様の列とする. リー代数 R から R/S の上への自然準同型写像を φ とし $R_i = \varphi^{-1}(R_i^*), i = 1, \cdots, m$ とする. 容易に判るように

$$R_0 = R, R_1, \cdots, R_m = S_0, R_{m+1} = S_1, \cdots, R_{m+n} = \{0\}$$

なる列により R の可解なることが判る.

これで命題 B) は証明された.

定理 93. R を任意の体 K 上のリー代数とする. このとき R には一つの可解イデアル S が存在し，R の任意の可解イデアルは S に含まれる. このイデアル

S を R の**最大可解イデアル**［または**根基**（ラジカル）］という．S がリー代数 R の最大可解イデアルならば R/S は準単純リー代数である．

証明．いま，S を R の可解イデアルで他の可解イデアルに含まれないものとする[1]．この S が最大可解イデアルなることを証明しよう．そのために T を R の任意の一つの可解イデアルとするとき，$S+T$ がまた R の可解イデアルであることを証明しよう．そうすれば［$S+T=S$ 即ち］$T \subset S$ となる．命題 A) によりリー代数 $(S+T)/T$ と $S/(S \frown T)$ は同型で，命題 B) により $S/(S \frown T)$ は可解であるから，それと同型なリー代数 $(S+T)/T$ は可解である．$(S+T)/T$ と T が可解故，また命題 B) により $S+T$ が可解イデアルである．

次にリー代数 R/S が準単純であることを証明しよう．φ を R から $R/S=R^*$ の上への自然準同型写像とし，いま R^* が $\{0\}$ でない可解イデアル Q^* を有したと仮定しよう．いま，$Q=\varphi^{-1}(Q^*)$ とすれば，Q は S と異なり S を含む G のイデアルである．リー代数 Q/S 及び S が可解だから，命題 B) により Q がまた可解である．これは S が最大可解イデアルなることに反し不合理である．

これで定理 93 は証明された．

定理 93 は弱い意味では任意のリー代数の研究は可解及び準単純リー代数の研究に還元されることを示すものである．この還元の可能性は次の定理 94（〔21, 47〕参照[2]）により，ずっと強められる．ここでは定理を証明なしで述べておく．

定理 94．K が標数 0 の体 K 上のリー代数とし，S をその最大可解イデアルとすれば，R の準単純部分代数 T であって $S \frown T=\{0\}$, $S+T=R$ となるものが存在する．

T がイデアルであるときにはリー代数 R は可解リー代数 S と準単純リー代数 T の直和となるが，一般には部分代数 T はイデアルではなく，R の可解イデ

訳註 1） そのような S としては例えば可解イデアル中次元の最大のものをとればよい．ここでは勿論 R が有限次元であることを仮定している．

訳註 2） 安倍亮：位相数学研究，岩波書店，更に C. Chevalley - S. Eilenberg: *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, *Trans. Am. math. Soc.*, vol. 63 (1948), pp. 85〜124, 後藤守邦：リー群の同型表現，数学第二巻 (1949), pp. 1〜16, 附記．及び，松島與三：リー環論，共立出版，等にも証明がある．

アル S と準単純部分代数 T への分解は一意的でなく，直和に分解する場合に比較してずっと複雑である．それにも拘らず定理 94 はリー代数 R の研究をリー代数 S 及び T のそれに帰着させる或る種の可能性を与えるものであって，我々もこれを大局的なリー群をそのリー代数から構成する問題において用いることにする(§ 59 参照).

次に実リー代数と複素リー代数の間の関係を確立しよう.

C) R を実ベクトル空間とする．いま $z = x + iy$, $x \in R$, $y \in R$, $i = \sqrt{-1}$ なる記号の集合を $[R]$ とする．$[R]$ の元 $z = x + iy$ に複素数 $\gamma = \alpha + i\beta$ を乗ずることを $\gamma z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$ で定義し，二つの元の和を $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ で定義する．このときもちろん $[R]$ は複素数体の上のベクトル空間，即ち複素ベクトル空間となる．この $[R]$ を実ベクトル空間 R の**複素化**という．$[R]$ の元 $z = x + iy$ の**共役ベクトル** $\bar{z}$ を $\bar{z} = x - iy$ で定義する.

R がリー代数であるとき，複素ベクトル空間 $[R]$ において二つのベクトルの交換子積を $[z_1, z_2] = [x_1 + iy_1, x_2 + iy_2] = [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + i[x_1, y_2] + i[y_1, x_2]$ で定義する．このように定義した $[z_1, z_2]$ は $[R] \times [R] \to [R]$ の複素双 1 次写像であり(§ 52, (14) 参照)かつ § 52 の (15) 及び (16) 式をみたす．従って $[R]$ は複素リー代数である．複素リー代数 $[R]$ を実リー代数 R の**複素化**という．リー代数 $[R]$ の次元は R の次元に等しい．S が R のイデアルならば $[S]$ は $[R]$ のイデアルであって

$$[R/S] \cong [R]/[S]$$

が成立つことは容易に判る.

これから R が可解リー代数ならば $[R]$ も可解であることが直ちに判る.

$[R]$ が複素リー代数であることを証明しよう．$e_1, \cdots, e_r$ をリー代数 R の一つの基底とし

$$[e_j, e_k] = c_{jk}{}^l e_l \tag{2}$$

とする．このとき実数の組 $c_{jk}{}^l$ はリー代数の構造定数であり，従って § 52 の (18) 及び (19) なる関係をみたす．$e_1, \cdots, e_r$ はリー代数 $[R]$ の基底でもあるから，$c_{jk}{}^l$

は $[R]$ の構造定数でもある．それが § 52 (18), (19) をみたすのだから，(2)で定められる $[R]$ における交換子積は § 52 の (15) 及び (16) なる関係をみたす．

D)　Rを複素リー代数としよう．R の元に複素数を掛けることが定義されており，特に実数を R の元に掛けることも定義されているから，リー代数 R を実リー代数と見なすことができる．この実リー代数を我々は (R) で表わすことにする．集合としては R と (R) は同じもので，その 2 元の交換子積はどちらのリー代数でも定義されているが，それは一致する．唯 R の元には複素数を掛けることができるが，(R) の元には実数のみを乗ずることができるのである．従って集合 $R = (R)$ の部分集合で実リー代数 (R) の部分代数ではあるが複素リー代数 R の部分代数ではないものもあり得る．$e_1, \cdots, e_r$ が R の基底ならば $e_1, \cdots, e_r, ie_1, \cdots, ie_r$ が (R) の基底となる．容易に判るように S が R のイデアルならば (S) は (R) のイデアルであって

$$(R/S) = (R)/(S)$$

である．これから R が可解ならば (R) も可解であることが直ちに知られる．

E)　R を実リー代数，R の複素化を $[R]$ とし (C)参照)，$[R]$ を実リー代数と見たものを $([R])$ とする (D)参照)．集合 $[R]$ においては一つのベクトル z を共役ベクトル $\bar{z}$ に写す写像 $z \to \bar{z}$ が定義されている．従ってこの写像は $([R])$ においても定義されていることになる．今，$\psi(z) = \bar{z}$ と置けば，ψ は実リー代数 $([R])$ の自己同型写像であるが，複素リー代数 $[R]$ の自己同型写像ではない．自己同型写像 ψ は**対合的**である．即ち，$\psi^2 = \psi \cdot \psi$ は恒等写像である．実リー代数 $([R])$ は部分代数として元の実リー代数 R を含み，R は $([R])$ の元 z で $\psi(z) = z$ となるものの全体であることを注意しておこう．

F)　R を実リー代数，S をその最大可解イデアルとする．このとき $[S]$ は $[R]$ の最大可解イデアルである．従って R と $[R]$ が可解になるかならぬか，または準単純になるかならぬかは一致する．

これを証明しよう．T を $[R]$ の最大可解イデアルとしよう．容易に判るように $\bar{T}$ もまた $[R]$ の可解イデアルであるから，T が最大可解イデアルであることから $T = \bar{T}$ となる．従って T がベクトル z を含めばその共役ベクトル $\bar{z}$ も含

み，従って実ベクトル $z+\bar{z}$ 及び $i(z-\bar{z})$ を含む．従って実リー代数 R のイデアル S' が存在して $T=[S']$ となる．リー代数 T は可解であるから実リー代数 (T) も可解であり，従って S' は可解リー代数 (T) の部分代数であるからまた可解である（B)参照)．S が最大可解イデアルであるから $S'\subset S$ であり，イデアル $[S]$ が可解であるから $[S]\subset[S']=T$ である．この二つの包含関係から $[S]=[S']$ 即ち $T=[S]$ が得られる．

従って命題 F) は証明された．

既に述べたように複素リー代数は実リー代数を研究する手段としてまず導入された．複素リー代数にもっと独立した意味を与えるために，**複素リー群**の概念（下記を見よ）を導入しよう．しかしこの概念は本書では後で用いない．

G)　単位元が e であるリー群芽 G' は，G' からある複素ベクトル空間の 0 の近傍の上への位相写像 f で $f(e)=0$ となるものが存在するとき**複素座標を許す**という．G' の点 x の複素座標としてベクトル $f(x)$ の座標をとる．ある一つの定まった複素座標系を持つリー群芽 G' において，二つの元の積を表わす函数が複素変数の解析函数であるとき，G' を**複素リー群芽**という．複素リー群芽 G_1' から他の複素リー群芽 G_2' の上への同型写像 g は，複素座標で書表わせば複素変数の解析函数となるとき，複素リー群芽としての**同型写像**であるという．そこで複素リー群芽の座標は固定したものでなく解析的な変換を除いて定まるものである．複素リー群芽 G' の部分群芽及び正規部分群芽は［実］リー群芽としての G' の**部分群芽**または**正規部分群芽**であって，複素座標の間の解析的な関係式で定められるものをいう．**準同型写像**についても同様に定義する．G' を複素リー群芽とし，$x(t)$ を複素座標で $x^i=x^i(t)$ で表わされる曲線とする．ここで t は実助変数で $x(0)=e$ とする．曲線 $x(t)$ に**接する**ベクトル a の座標は $a^i=\dfrac{d}{dt}x^i(0)$ で定められる．このようにして e において G' に**接する**複素ベクトル空間 R が定められる．§52 において行なったのと全く同様にして R に属する二つの複素ベクトルに対しその交換子が定義され，それによって R は複素リー代数となる．§56 で行なった構成は複素リー代数とそれから構成される複素リー群芽に対しても成立つことを確かめることができる．§57 で述べた事柄に

ついても全く同様である．任意の複素リー群芽 G' は2倍の次元を有する実リー群芽と見なすことができる．この実リー群芽を我々は (G') で表わす．リー群芽 (G') のリー代数は (R) である（D）参照）．或る（群芽でなく）大域的な位相群 G の単位元の近傍が複素座標を許し，それによって複素リー群芽となるとき，G を［**大域的**］**複素リー群**という．

実リー代数 R に対してその複素化 $[R]$ を定義したのと同様に，我々は実リー群芽 G' に対してその複素化 $[G']$ を定義することができる．

H） G' を実リー群芽とする．G' には常に解析座標即ちその座標系においては積 $z^i = f^i(x, y) = f^i(x^1, \cdots, x^r, y^1, \cdots, y^r)$ が解析函数で表わされるようなものが存在し，しかも解析的変換を除いてただ一つ存在する．函数 f^i は解析函数だから，その変数は実数だけでなく複素数でも意味をもつ．この結果一つの複素リー群芽 $[G']$ における積の法則が得られる．$[G']$ をリー群芽 G' の**複素化**という．リー群芽 G' のリー代数が R ならば，$[G']$ のリー代数は $[R]$ である．

次に複素リー群芽 $[G']$ が，一つの大域的な連結かつ単連結なリー群の単位元の近傍であると仮定しよう．このリー群を $[G]$ で表わすことにする．リー代数 $([R])$ の対合的自己同型写像 ψ（E）参照）に対してリー群芽 $([G'])$ の対合的自己同型写像 φ' が対応する．この対合的自己同型写像 φ' は定理80によって一意的に群 $[G]$ の対合的自己同型写像 φ に拡張される．G を $[G]$ の元 x で $\varphi(x) = x$ をみたすものの全体の集合とする．集合 G は容易に判るようにリー群であって，そのリー代数は R である．そこで複素リー群 $[G]$ を大域的な実リー群 G の複素化ということにする．これは極めて自然な命名である．群 G があらかじめ与えられたものでなく群 $[G]$ によって定義されることが，この構成の欠点である．実リー群 G がどのような条件を満すときに複素リー群の中に含まれるかという問題は，A. I. Malzev〔25〕によって研究された．それによれば，特に中心が無限群であるような実単純［且つ準単純な］リー群は複素リー群の中に含まれることができないことが証明される．

例100. R を n 次元の実ベクトル空間とする．$\psi_k(x)$ を標準形に変換したとき $n-k$ 箇の正の係数と k 箇の負の係数を持つ縮退しない R 上の2次形式と

し，この 2 次形式を変えない R の上の 1 次変換の全体の作る群を G_k^n で表わす．容易に判るように G_k^n は実リー群である．変数が複素ベクトルになると $\psi_k(x)$, $k=0, 1, \cdots, n$, の相違がなくなるから，G_k^n ; $k=0, 1, \cdots, n$ の複素化はすべて互に同型である．しかし実リー群 G_k^n と G_l^n は $k=l$ となるか $k+l=n$ となるときだけ局所同型となる．またこの二つの場合には大域的なリー群としても同型である．また明らかに G_0^n は G_k^n, $0<k<n$ の何れとも局所同型とならない．それは G_0^n の普遍被覆群はコンパクトである（例 91 参照）のに G_k^n, $0<k<n$, はコンパクトでないからである．

群 G_1^4 は実リー群としては単純であるが，一方群 G_0^4 は前に見たように（例 89 参照）局所的には直和に分解し単純でない．従って実単純リー群 G_1^4 の複素化は単純でない[1)]．

次に G_1^3 を考えよう．G^* を G_1^3 の単位元の成分としよう．G^* は G_1^3 の元で正の行列式を有するものから成る．3 次元空間 R^3 の座標の原点を通るすべての直線の集合 P は**射影平面**と呼ばれる．方程式 $\psi_1(x)=0$ は射影平面 P の上の一つの実**円錐曲線** V を表わす．従って群 G^* に属する各変換は円錐曲線 V を不変にする，平面 P の射影変換を惹起する．従って群 G^* は円錐曲線 V を不変にする射影平面 P の射影変換の群と同型であり，この群は良く知られているように，**非 Euclid 平面の運動群**と同型であり，従って直線の上の 1 次分数変換群と同型である．

局所同型なものを同じと見れば 3 次元の単純リー群は二つしか存在しないことを注意して置こう；この二つは G_0^3 及び G_1^3 であって，前者はコンパクトであり後者はコンパクトでない．群 G_0^3 と群 G_1^3 の複素化は局所同型である．

§59. 大域的リー群の構成

この § では大域的なリー群をその構造定数，または同じことであるがそのリー代数から構成する．この構成には本書では証明しなかった定理 94 を用いる

訳註 1) 原書ではここの例として，G_2^4 が挙げてあるが G_2^4 は単純ではないので G_1^4 とした．G_1^4 は単純である．なお詳しいことは補註 $p.$ 573 を見よ．

のではあるけれども，定理94は全く局所的な性質に関する定理だから[それから大域的な結論を出すことは]やはり非常に興味のあることである．定理94を使わなくても可解リー代数または中心が$\{0\}$のみよりなるリー代数に対しては(大域的な)リー群が構成される．以下の証明は細目に拘泥するのを避けるために細部においては十分綿密には述べない所もあることをあらかじめ断って置く．そのとき問題となるのは群芽(§23, D)参照)においては積が任意の二元については定義されていないから，以下に述べる構成も群芽全体でなく，十分小さな一部分についてのみ意味を持つところにある(§23, G)参照)．しかし一々注意深く定義範囲を指定し，その度に新しい記号を導入していたら本文は本質的でない細目のために非常に繁雑となるであろう；そこで以下単に群芽というときは，適当なその一部分という意味であるとする．

A)　リー群芽G'の中心が単位元のみより成るときは，G'は一つの大域的リー群に含まれる．

これを証明するためにG'の随伴リー群芽L'(§54, F)参照)を考えよう．G'は中心を有しないからG'からL'の上への写像fはG'の適当な範囲では同型写像である．いま，L'における単位元の完全近傍系を

$$U_1, \cdots, U_i, \cdots \tag{1}$$

とする．LをL'に属する行列の有限箇の積の全体とする，容易に判るようにLは代数的な意味での群を作る．いま，(1)を単位元の完全近傍系としてLに位相を導入する．直ちに知られるように集合系(1)は定理9の条件をみたし，従ってこのときLは位相群となり，L'はLにおける単位元の一つの近傍となる．従ってリー群芽L'は大域的な群Lに含まれる．G'とL'は局所同型であるから命題A)は証明された．

補助定理．　リー群芽G'に次の性質をみたす正規部分群芽N'と部分群芽H'が存在すると仮定する．その性質とは，任意の$g'\in G'$は一意的に$g'=n'h'$, $n'\in N'$, $h'\in H'$と表わすことができ，しかも部分群芽N'は連結かつ単連結な大域的リー群Nに含まれ，部分群芽H'も連結かつ単連結な大域的リー群Hに含まれるというのである．[即ちN', H'はN, Hの単位元近傍と局所同型である．]

このとき位相空間NとHの直積G(§14, A)参照), 即ち(n, h), $n\in N$, $h\in H$, なる*pair*の全体Gに乗法を定義して, Gを位相群とし, しかも次の性質を満たすようにすることができる: 即ちG'の各元$g'=n'h'$に対し, Gの元(n', h')を対応させる写像χはリー群芽G'からリー群Gの単位元のある近傍の上への同相写像であって, しかもG'の十分小さい単位元近傍の上では, χ'は(局所)同型写像である. 従ってGは連結かつ単連結な大域的リー群であり, G'のある開集合をその群芽[単位元近傍]として含む.

証明. 群芽G'の内部自己同型$\varphi'_{g'}$を考える. $\varphi'_{g'}$は$\varphi'_{g'}(x)=g'xg'^{-1}$で定義される. N'はG'の正規部分群芽だから, $\varphi'_{g'}$は同時にN'の自己同型写像をも引起す.

定理80により群芽N'の自己同型$\varphi'_{g'}$は一意的に大域的な群Nの自己同型$\varphi_{g'}$に拡張される. 従ってH'の各元h'に対し群Nの自己同型写像$\varphi_{h'}$が対応する.

いま, 群芽H'の元h'で$\varphi_{h'}$がNの恒等写像であるようなものの全体をK'としよう. このとき$\varphi_{h'}$の型の自己同型写像の全体の作るリー群芽をL'とすれば, L'はH'/K'に同型である.

$$W_1, \cdots, W_n, \cdots \tag{2}$$

を群芽L'の単位元の完全近傍系とする. LをL'に属する自己同型写像の有限箇の積の全体の作る集合とする. 明らかにLは代数的な意味での群を作る. 集合系(2)を単位元の完全近傍系としてLに位相を入れる. 容易に判るように(2)は定理9の条件をみたし, 従ってLはL'を群芽として含むリー群となる.

上に述べたようにH'の各元h'には自己同型写像$\varphi_{h'}\in L'$が対応する. 従って, リー群芽H'からリー群芽L'の上への開局所準同型写像ψ'が存在する. 定理80によりこの局所準同型写像ψ'は大域的リー群Hから大域的リー群Lの上への準同型写像に一意的に拡張される. 従ってHの各元hにはリー群Nの一つの定まった自己同型写像$\varphi_h=\psi(h)$が対応する.

次に集合Gの二つの元即ち二つの対(n_1, h_1), (n_2, h_2)の積を

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2) \tag{3}$$

で定義する．この積の定義により G が位相群となることは見易い．

まず第一に G は代数的な意味で群を作る．

$$\begin{aligned}((n_1, h_1)(n_2, h_2))(n_3, h_3) &= (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)(n_3, h_3)\\ &= (n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3), h_1h_2h_3),\\ (n_1, h_1)((n_2, h_2)(n_3, h_3)) &= (n_1, h_1)(n_2\varphi_{h_2}(n_3), h_2h_3)\\ &= (n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3), h_1h_2h_3)\end{aligned}$$

であるから結合律が成立つ．G の単位元は (e_n, e_h) である．但し e_n, e_h はそれぞれ群 N 及び H の単位元である．また，(n, h) の逆元は $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$ で与えられる．実際((3)参照)，

$$(n, h)(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n\varphi_{hh^{-1}}(n^{-1}), hh^{-1}) = (e_n, e_h)$$

である．従って(3)により積を定義すれば，G は代数的な意味で群となる．

次に(3)で定義された積が位相空間 G で連続であることを証明しよう．そのために先ず第一に N の元 $\varphi_h(n)$ が n と h の対 (n, h) $(h\in H,\ n\in N)$ の函数とし連続であることを示そう．U, V をそれぞれ群芽 N' 及び H' における近傍で $VUV^{-1}\subset N'$ となるものとする．このとき $\varphi_h(n)$ は $U\times V$ の上では (n, h) の函数として連続である．それは $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ となるから明らかである．次に $h\in V$ とし，n を群 N の任意の一つの固定した元とする．群 N は連結だから $n = n_1 n_2\cdots n_k,\ n_i\in U,\ i = 1, \cdots, k,$ と書かれる(定理14参照)．このとき

$$\varphi_h(n) = \varphi_h(n_1)\cdots\varphi_h(n_k)$$

である．上に証明したことから $\varphi_h(n_i)$ は h の連続函数であるから，その積 $\varphi_h(n)$ も h の連続函数である．何となれば N における乗法が連続な演算だから．次に $h\in V$ とし n は N の中を勝手に動くとしよう．このとき n^* を固定した元，$n'\in U$ として $n = n^*n'$ となるとすれば $\varphi_h(n) = \varphi_h(n^*)\varphi_h(n')$ となるから，上に証明したことから函数 $\varphi_h(n)$ は $V\times N$ 上で対 (n, h) の函数として連続である．次に h も n もそれぞれ H, N の中を自由に動くものとする．このとき $h = h^*h'$，但し h^* は固定した元，$h'\in U$ なるときを考えればよいが，このとき $\varphi_h(n) = \varphi_{h^*}(\varphi_{h'}(n))$ であり，$\varphi_{h'}(n)$ は上に証明したように (h', n) の連続函数であり，また $\varphi_{h^*}(\bar{n})$ は $\bar{n}$ の連続函数である．従って $\varphi_h(n)$ は (h, n) の連続函数である．

従って $n_1\varphi_{h_1}(n_2)$ は n_1, h_1, n_2 の連続函数である．もちろん h_1h_2 は h_1, h_2 の連続函数である．従って(3)で定義される積は連続である．全く同様の考察により (n, h) の逆元 $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$ が (n, h) の連続函数となることが証明される．従って G は位相群である．

次に G' から G の一部分への写像 χ が同型写像であることを証明しよう．$g_1 = n_1h_1$, $g_2 = n_2h_2$ が G' の二つの元ならば

$$g_1g_2 = n_1h_1n_2h_2 = n_1h_1n_2h_1^{-1}h_1h_2 = (n_1\varphi_{h_1}(n_2))(h_1h_2)$$

である．一方群 G の2元 (n_1, h_1), (n_2, h_2) の積は，積の定義(3)によって，$(n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)$ である．χ が同相写像であることは明らかである．

これで補助定理は証明された．

次に補助定理を可解リー代数から大域的リー群を構成するのに用いよう．

定理 95. R を実可解リー代数とする(定理49参照)．このとき連結且つ単連結な大域的リー群でそのリー代数が初めに与えられた R と同型であるものが存在する．群 G は Euclid 空間と同位相である．即ち G 全体に Descartes 座標 $x^1, \cdots, x^r$ を導入することができる．このとき更に可能なすべての Descartes 座標のうち次の性質を持つものが存在する．1) この座標系では G の2元の積が G 全体で定義された解析函数で表わされる．2) $g_i(t)$ をこの座標系で i 番目の座標成分が t で，他の座標成分はすべて0であるような点を表わせば，$g_i(t)$ は群 G の1径数部分群であり，点 $g_1(t^1)\cdots g_r(t^r)$ の座標は $(t^1, \cdots, t^r)$ である．更に $g_1(t^1)\cdots g_i(t^i)$ の形の元の全体を H_i とすれば，H_i は群 G の部分群で群 H_{i+1} の正規部分群となる．

証明. 可解リー代数には部分代数の増大列

$$S_1, \cdots, S_r = R$$

で S_i は次元が i で S_{i+1} のイデアルとなるようなものが存在することは容易に知られる．いま G' を R をリー代数とするリー群芽とする(定理89参照)．部分代数 S_i には G' の部分リー群芽 H_i' が対応する(定理90参照)．リー代数 S_1 は1次元であるから，これに対し定理95はもちろん成立つ．いま，定理はリー代数 S_i に対しては成立つと仮定しよう．このときリー群芽 H'_{i+1} の中から H_i'

に含まれない1径数部分群 $\{g'_{i+1}(t)\}=K'_{i+1}$ を選ぶ．このとき $H_i'K'_{i+1}=H'_{i+1}$ で，$H_i'\frown K'_{i+1}$ は単位元のみより成る．同時に H'_i は H'_{i+1} の正規部分群芽である(定理91参照)．従ってこの§の補助定理の条件がみたされるから，これを適用することができる．それは H'_i は仮定により大域的リー群 H_i に含まれ，また群芽 K'_{i+1} は1径数群だからそれを含む大域的な1径数群 $K_{i+1}=\{g_{i+1}(t)\}$ に含まれるからである．このようにして［H'_{i+1} を含む］大域的リー群が［補助定理により］構成される．その元は $(h_i, g_{i+1}(t))$, $h_i \in H_i$ なる形をしている．これで帰納法が完成し，定理95は証明された．積が解析的であることは $g_{i+1}(t)$ の元から作られる H_i の自己同型が解析的に表わされるという事実から直ちに知られる．

定理96. R を任意の実リー代数とすれば，R と同型なリー代数を有する大域的リー群 G が存在する(この定理の証明には本書では証明しなかった定理94を用いることを注意しておく)．

証明. R をリー代数とするリー群芽を G' とする(定理89参照)．定理94により，リー代数 R には可解イデアル S と準単純部分代数 T で，$S\frown T$ が0のみより成り，和 $S+T$ が R と一致するものが存在する．N' 及び H' をそれぞれリー群芽 G' の部分代数 S 及び T に対応する部分群芽とする(定理90参照)．このとき N' は G' の正規部分群芽であり，$N'\frown H'$ は単位元のみから成り積 $N'H'$ は G' と一致する．群芽 N' のリー代数 S は可解だから，N' は連結かつ単連結な大域的リー群 N に含まれる(定理95参照)．リー代数 T の中心は0だけから成る故，リー群芽 H' の中心は単位元だけから成る．従って H' は一つの連結な大域的リー群 H^* の中に含まれるとしてよい(A)参照)．H^* の普遍被覆群 $\tilde{H}^*=H$(§51参照)を考えれば，単連結な大域的リー群で H' を単位元の近傍として含むものが存在することが判る．従ってこの§の補助定理が適用できるから，リー群芽 G' は大域的リー群 G の中に含まれる．G のリー代数は R であるから，定理は証明された．

定理97. G が連結で単連結な大域的リー群とし N' が G の正規部分群芽とすれば，N' の一部分は G の大域的正規部分群 N に含まれる（正規部分群芽で

ない部分群芽 H' に対しては同様の定理は必ずしも成立たない(例 99 参照))[1].

証明. G' を G の単位元の適当に小さな近傍とする. このとき G' はリー群芽で N' はその正規部分群芽である. 剰余群芽 $G'/N' = K'$ (§23, J)参照)はリー群芽であるから, 一つの連結で単連結な大域的リー群 K に含まれる(定理 96 参照). 群芽 G' から K' の上への自然準同型写像 f' は群 G から群 K の中への開局所準同型写像であり, 群 G は単連結であるから, 局所準同型写像 f' は大域的な群 G 全体から K の上への準同型写像 f に拡張される(定理 80 参照). 準同型 f の核を N とすれば, 容易に判るように N はリー群芽 N' の十分小なる単位元の近傍を含む.

これで定理 97 は証明された. もちろん定理 94 は G が単連結でなければ一般には成立たない(例 98 参照). 定理 97 で得られた正規部分群 N は A. I. Malzev〔24〕により証明されたように単連結である[2]. 正規部分群 N が連結であることは群 K が単連結であるという仮定から直ちに導かれる[3].

例 101. この§の補助定理を証明するに用いた方法はリー群の例を作るのに応用される.

N を r 次元 Euclid 空間とし, ベクトルの加法による群と考える. 更に H を空間 N の[原点のまわりの]廻転全体の作る群とする. 従って H の各元 x には Euclid 空間 N の廻転 φ_x に対応する. 廻転 φ_x は群 N の自己同型写像である. いま, $n \in N$, $h \in H$ に対する対 (n, h) の全体 G を群にしよう. G の 2 元の積を

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)$$

で定義する. 容易に判るように G はリー群で. N はその正規部分群, H はその部分群である. R をリー群 G のリー代数とし, $N \to S$, $H \to T$ とする. もしも $r \geqq 3$ ならば S はリー代数 R の最大可解イデアル, 即ちラジカルで, T は R の準単純部分代数である(定理 94 参照).

全く同様の方法によって, 任意のリー群 N は N の自己同型写像がすべて G

訳註 1) 即ち正規部分群芽でない H' が生成する G の解析的部分群は必ずしも単連結群 G の中で閉じないのである. §57 の訳註(450 頁)を見よ.

訳註 2) 後藤守邦: リー群の同型表現, 数学第二巻(1949), pp. 1〜16, 補題 3.

訳註 3) Chevalley: *Theory of Lie groups.* I, Chap. II, §X, prop. 4, cor. 1.

のある元による内部自己同型写像であるようなリー群 G の中に含まれることがいえる.

§60. リー変換群芽

前に注意したように, リー群は最初連続変換群として考えられたものであった. 従って Lie の第1及び第2基本定理も変換群に対する定理として Sophus Lie によって述べられ証明されたのである. そこで §56 で述べた Lie の第1及び第2基本定理は, その最初に与えられた形から非常に異なっている. この§では叙述の完全を期すために Lie の第1及び第2基本定理((7)及び(8)参照)とその逆(定理98参照)をその最初の形に近い形で述べて見よう.

一昔前の本ではみなそうであったような局所的な考察では, 考える函数はたいてい変数のすべての値に対しては定義されず, その度毎に一々異なった領域を定義範囲とする. 従って正確を期すためには殆ど毎回函数の存在範囲について断らなければならない. しかしここではそれを一々断らない. それはどの場合でも考える函数の各々についてどれ程小さい範囲でそれらが定義されていれば十分であるかは容易に判るからである.

定義 50. G を r 次元のリー群芽とし, Γ を n 次元 Euclid 空間 A のある開集合とする. いま, G の各元 x に対して Γ を A のある開集合に位相的に写す写像 φ_x が x について連続的に対応すると仮定しよう. φ_x は Γ の元 ξ を A の元 η に写すとしよう. 即ち:

$$\eta = \varphi_x(\xi) = \varphi(\xi, x) \qquad (1)$$

である. 我々は G が更に次の条件をみたすとき開集合 Γ の**リー**(連続)**変換群芽**という.

a)　G の単位元 e には Γ をそれ自身の上に写す恒等写像

$$\varphi_e(\xi) = \xi \qquad (2)$$

が対応する. また,

$$\varphi_x(\varphi_y(\xi)) = \varphi_{xy}(\xi) \qquad (3)$$

である. 即ち G の元の積には変換の積が対応する.

b) 変換 φ_x と φ_y が一致するのは $x=y$ のときに限る．この条件はまた変換 φ_x が恒等変換となるのは $x=e$ のときに限るとも言い直せる．

c) $\varphi(\xi, x)$ の座標は点 ξ 及び x の座標の函数として十分多くの回数だけ微分可能である．

座標によって書表わすと関係式(1)は

$$\eta^i = \varphi_x{}^i(\xi) = \varphi^i(\xi, x) = \varphi^i(\xi^1, \cdots, \xi^n, x^1, \cdots, x^r),$$
$$i = 1, \cdots, n \tag{4'}$$

となる．

A) G をある開集合 Γ のリー変換群芽とし，a を接ベクトル(§41, C)参照)とする G に含まれる一つの曲線を $x(t)$ とする．ξ を固定したとき点 $\varphi(\xi, x(t))$ は Γ の中の一つの曲線を描く．曲線 $\varphi(\xi, x(t))$ の $t=0$ における接ベクトルは曲線 $x(t)$ によらず唯接ベクトル a のみによって定まる；そこでこの接ベクトルを $\psi(\xi, a)$ で表わそう．座標成分で書くとベクトル $\psi(\xi, a)$ は

$$\psi^i(\xi, a) = \lambda_\alpha{}^i(\xi)a^\alpha = \lambda_\alpha{}^i(\xi^1, \cdots, \xi^n)a^\alpha \tag{5}$$

という形で表わされる．ここで

$$\lambda_j{}^i(\xi) = \frac{\partial\varphi^i(\xi, x)}{\partial x^j} \text{ の } x = e \text{ における値} \tag{6}$$

である((4)参照)．函数 $\eta = \varphi(\xi, x)$ は ξ を固定して x の函数とみるとき次の連立微分方程式をみたす((6)参照)．

$$\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j} = \lambda_\alpha{}^i(\eta)v_j{}^\alpha(x), \tag{7}$$

ここで $v_j{}^\alpha(x)$ は群 G の補助函数である(§56, A)参照)．連立微分方程式(7)の積分可能条件(定理85参照)は次の形に書表わされる．

$$\frac{\partial\lambda_j{}^i(\eta)}{\partial\eta^\alpha}\lambda_k{}^\alpha(\eta) - \frac{\partial\lambda_k{}^i(\eta)}{\partial\eta^\alpha}\lambda_j{}^\alpha(\eta) = c_{jk}{}^\beta\lambda_\beta{}^i(\eta), \tag{8}$$

ここで $c_{jk}{}^\beta$ は群 G の構造定数である．

関係式(5)を証明しよう．$x = x(t)$ と置いて(4)式を t について微分すれば

$$\frac{d\varphi^i(\xi, x(t))}{dt} = \frac{\partial\varphi^i(\xi, x)}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}$$

が得られる．この式で $t=0$ とすれば(5)式となる．

（7）を証明するためには§56と同様に（§56, A)参照) $p=(x+\delta x)x^{-1}$ なる G の元を考える．このとき

$$\varphi(\xi, x+\delta x)=\varphi(\eta, p)$$

である((1)及び(3)参照)．有限な増分を0に収束させて導函数に移れば(7)式を得る(§56, A)参照)．

定理85によって連立方程式(7)の積分可能条件は

$$\frac{\partial\lambda_\alpha{}^i(\eta)}{\partial\eta^r}v_j{}^\alpha(x)\lambda_\beta{}^r(\eta)v_k{}^\beta(x)-\frac{\partial\lambda_\beta{}^i(\eta)}{\partial\eta^r}v_k{}^\beta(x)\lambda_\alpha{}^r(\eta)v_j{}^\alpha(x)$$
$$+\lambda_\delta{}^i(\eta)\left(\frac{\partial v_j{}^\delta(x)}{\partial x^k}-\frac{\partial v_k{}^\delta(x)}{\partial x^j}\right)=0$$

という形になっている．§56の(8)式によってこの条件は

$$\left(\frac{\partial\lambda_\alpha{}^i(\eta)}{\partial\eta^r}\lambda_\beta{}^r(\eta)-\frac{\partial\lambda_\beta{}^i(\eta)}{\partial\eta^r}\lambda_\alpha{}^r(\eta)-\lambda_\delta{}^i(\eta)c_{\alpha\beta}{}^\delta\right)v_j{}^\alpha(x)v_k{}^\beta(x)=0 \quad (9)$$

と同値である．行列 $\|v_j{}^\alpha(x)\|$ の行列式が0でないから，条件(8)と(9)は同値である．

B)　G を開集合 Γ のリー変換群芽とし，R をそのリー代数とする．A)によって R の各ベクトル a に対し，Γ 上の**ベクトル場** $\psi(\xi, a)$ が対応する．従って開集合 Γ の上には $\psi(\xi, a)$ という形をしたベクトル場の集まり P がある．関係式(5)から直ちに判るように α, β が任意の実数であるとき，

$$\psi(\xi, \alpha a+\beta b)=\alpha\psi(\xi, a)+\beta\psi(\xi, b) \quad (10)$$

が成立つ．従ってベクトル場の集合 P が二つのベクトル場 λ, μ を含むならば，P はベクトル場 $\alpha\lambda+\beta\mu$ をも含む．これは P が加法によってベクトル空間となることを示すものである．集合 P の二つの元 $\lambda=\lambda(\xi)$, $\mu=\mu(\xi)$ に対しその交換子を

$$[\lambda(\xi), \mu(\xi)]^i=\frac{\partial\lambda^i(\xi)}{\partial\xi^r}\mu^r(\xi)-\frac{\partial\mu^i(\xi)}{\partial\xi^r}\lambda^r(\xi) \quad (11)$$

で定義する．このとき関係

$$[\psi(\xi, a), \psi(\xi, b)]=\psi(\xi, [a, b]) \quad (12)$$

が成立つ．(12)式が証明できれば $\lambda\in P$, $\mu\in P$ ならば $[\lambda, \mu]\in P$ となる．従って P に交換子が定義される．関係式(10)及び(12)はベクトル $a\in R$ に対しベクトル

場 $\psi(\xi, a)\in P$ を対応させるとき，加法と実数を乗ずることと交換子が保存されることを示している．

これにより P に定義された交換子積は定義 48 の条件をみたし，従ってベクトル $a\in R$ に対しベクトル場 $\psi(\xi, a)\in P$ を対応させる写像 ψ はリー代数 R からリー代数 P の上への準同型写像であることが証明された．更に写像 ψ は単に準同型写像であるのみならず実は同型写像であることも証明される．リー代数 P を**開集合 Γ の変換リー代数**という．

関係(10)は既に述べたように関係式(5)から直ちに導かれる．(12)を証明するには(8)式の両辺に $a^j b^k$ を乗じて j 及び k について総和する．このようにして得られた式において(5)の関係を使えば(12)となる．

写像 ψ が同型写像であることを証明するには，ベクトル空間 P の次元がベクトル空間 R の次元と等しいことを証明すればよい．いま，$\lambda_k(\xi)$ を成分が $\lambda_k^{1}(\xi), \cdots, \lambda_k^{n}(\xi)$ であるようなベクトル場とする．このときベクトル場

$$\lambda_k(\xi),\ k=1, \cdots, r, \tag{13}$$

はベクトル空間 P を張る((5)参照)．従って[r 箇の]ベクトル場(13)が1次独立であること，即ち(13)のベクトル場の定数係数の1次結合が0となるのはその各係数がすべて0となる場合に限ることを証明すれば十分である．

いま，接ベクトルが a である G の1径数部分群 $x(t)$ を考えよう．(7)式の x の所へ $x(t)$ を代入した式に $\dfrac{dx^j(t)}{dt}$ を乗じて j について総和すると

$$\frac{d\eta^i}{dt}=\lambda_\alpha{}^i(\eta)\,v_j{}^\alpha(x(t))\,\frac{dx^j(t)}{dt}=\lambda_\alpha{}^i(\eta)\,a^\alpha \tag{14}$$

となる(§56，(9)参照)．そこで r 箇のベクトル場(13)が1次従属であると仮定すれば，ベクトル $a\neq 0$ で(14)の右辺が恒等的に0となるようなものが存在することになる．このとき点 $\eta=\varphi(\xi, x(t))$ は t に関係せず，すべての $\xi\in\Gamma$ に対し $\eta=\xi$ となる．従って G の元 $x(t)$ は[すべての t に対し] Γ の恒等写像に対応することになるが，これは不可能である(定義50，b)参照)．

これで命題B)は完全に証明された．

命題A)及びB)の逆は次の定理で与えられる．

定理 98. Γ を n 次元 Euclid 空間のある開集合とする．Γ の上のベクトル場の集合 P で r 次元ベクトル空間をなすものが与えられていると仮定する．ベクトル場の集合 P がベクトル空間を作るとは $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$ が P に属するベクトル場ならば任意の実数 α, β に対しベクトル場 $\alpha\lambda(\xi)+\beta\mu(\xi)$ もまた P に属することを意味する．P において交換子積を

$$[\lambda(\xi), \mu(\xi)]^i = \frac{\partial\lambda^i(\xi)}{\partial\xi^r}\mu^r(\xi) - \frac{\partial\mu^i(\xi)}{\partial\xi^r}\lambda^r(\xi) \tag{15}$$

によって定義する．

いま P に属する任意の二つのベクトル場 $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$ に対し $[\lambda(\xi), \mu(\xi)]$ なるベクトル場もまた P に属すると仮定する．これらの仮定がみたされるとき開集合 Γ には**変換リー代数** P が与えられたという．このとき Γ のリー変換群芽(A)参照)であって，それに対応する変換リー代数(B)参照)が与えられたリー代数 P となるようなものが唯一つ存在する．

証明. まず第一に λ, μ, ν を任意の三つのベクトル場とすれば

$$[\lambda, \mu] + [\mu, \lambda] = 0 \tag{16}$$

及び

$$[\lambda, [\mu, \nu]] + [\mu, [\nu, \lambda]] + [\nu, [\lambda, \mu]] = 0 \tag{17}$$

が成立つ．これらの関係は交換子の定義(15)から直接計算して証明される．

いま，P において1次独立な r 箇のベクトル場 $\lambda_k(\xi)$, $k=1, \cdots, r$ をとる．仮定により P は r 次元のベクトル空間だから，かかる $\lambda_k(\xi)$ は確かに存在する．これらは P の基底を作る．従って

$$[\lambda_j(\xi), \lambda_k(\xi)] = c_{jk}{}^{r}\lambda_r(\xi) \tag{18}$$

という関係が成立つ．但しここで $c_{jk}{}^i$ は（リー代数 P の構造）定数であって，(16) 及び (17) により構造定数に対し一般に成立つ関係，即ち§52の(11)式，(12)式をみたす．$c_{jk}{}^i$ を構造定数とするリー群芽 G を構成し（定理88参照）その補助函数(§56参照)を $v_j{}^i(x)$ とする．

いま，x の未知函数 η に関する連立微分方程式

$$\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j} = \lambda_\alpha{}^i(\eta)\, v_j{}^\alpha(x) \tag{19}$$

を考える．かかる形の微分方程式は前にも考察された((7)参照)．この方程式の積分可能条件は(8)式の形で表わされる．ところが(18)式は(8)式を唯書換えただけのものであるから，連立微分方程式は積分可能であり，初期条件

$$\varphi(\xi, e) = \xi \tag{20}$$

をみたす解 $\varphi(\xi, x)$ が存在する．このようにして G の各元 x に対し Γ の点 ξ を点 $\eta = \varphi_x(\xi) = \varphi(\xi, x) \in \Gamma$ に写す Γ の写像 φ_x を対応させることができる．この対応が定義 50 の条件 a) 及び b) をみたすことを証明しよう．

x 及び y を G の二つの元とし y は固定されており，x が変数であるとしよう．

$$f = xy,\ \eta = \varphi(\xi, y),\ \zeta^* = \varphi(\eta, x),\ \zeta = \varphi(\xi, f)$$

と置く．条件 a) を証明するには $\zeta^* = \zeta$ なることを証明すればよい．そのためにはよくやる手として，x の函数 ζ 及び ζ^* が同一の微分方程式の，$x = e$ なるとき $\zeta^* = \zeta = \eta$ という同一の初期条件をみたす解であることを示せばよい．

$$\frac{\partial \zeta^{*i}}{\partial x^j} = \lambda_\alpha{}^i(\zeta^*)\, v_j{}^\alpha(x) \tag{21}$$

が成立つ((19)参照)．行列 $\| v_j{}^i(x) \|$ の逆行列を $\| u_j{}^i(x) \|$ とすれば，§56の(6)式は次のような形：

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} = u_\beta{}^\alpha(f)\, v_j{}^\beta(x) \tag{22}$$

に変換される．この(22)式から

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial f^\alpha} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} = \lambda_\gamma{}^i(\zeta)\, v_\alpha{}^\gamma(f)\, u_\beta{}^\alpha(f)\, v_j{}^\beta(x) = \lambda_\alpha{}^i(\zeta)\, v_j{}^\alpha(x) \tag{23}$$

が得られる．(21)と(23)という二つの方程式は同じものであるから，与えられた初期条件の下では微分方程式の解が唯一つであることから $\zeta = \zeta^*$ となり，条件 a) が証明される．

条件 b) を証明するために，いま b) が成立たないと仮定しよう．そのとき，Γ の恒等写像に対応する G の元 x の全体 N は，G の正規部分群を作る．従って G の1径数部分群 $x(t)$ でその元はすべて Γ の恒等写像に対応し，しかもその接ベクトル a は0でないようなものが存在することになる．(19) 式の x に $x(t)$ を代入した式の両辺に $dx^j(t)/dt$ を乗じて j について総和すれば

$$\frac{d\eta^i}{dt}=\lambda_\alpha{}^i(\eta)v_\beta{}^\alpha(x(t))\frac{dx^\beta(t)}{dt}=\lambda_\alpha{}^i(\eta)a^\alpha \qquad (24)$$

となる(§56, (9) 参照). ところが仮定により, $\eta(t)=\varphi(\xi, x(t))$ は t に関係せず, 定点 ξ であるから, (24)の左辺は0であり, 従って

$$\lambda_\alpha{}^i(\xi)a^\alpha=0$$

が恒等的に[即ちすべての $\xi\in\Gamma$ に対して]成立つ. これはベクトル場 $\lambda_k(\xi)$, $k=1,\cdots,r$, が1次従属であることを示し, 不合理である.

条件 c) は $\varphi(\xi, x)$ が微分方程式の解であるからもちろん成立つ.

明らかにいま構成したリー群芽 G の変換リー代数は[初めに与えられた]リー代数 P である. かかるリー群芽が一つしかないことは, 変換 φ_x は微分方程式(19)と初期条件(20)で定まり[(19)に現われる]補助函数 $v_j{}^i(x)$ は第1種標準座標ではリー代数 P の構造定数から一意的に定まることから導かれる.

これで定理98は証明された.

最後に**推移的** (*transitive*) なリー変換群芽について述べよう. これに対しては§24で述べたと同様のことが成立つ. ここではそれらの結果を証明なしで簡単に述べ, 局所的な考察と大域的な考察との間のギャップを注意しよう.

C)　G を開集合 Γ の推移的リー変換群芽とする. Γ の変換群芽 G が推移的であるというのは, 任意の $\xi\in\Gamma$ に対しその近傍 $U\subset\Gamma$ が存在して $\eta\in U$ ならば, $\varphi_x(\xi)=\eta$ となる G の元 x が存在することを意味する. α を Γ の1固定点とし, $\varphi_x(\alpha)=\xi$ となる G の元 x の全体を K_ξ で表わす. このとき $K_\alpha=H$ は群芽 G の部分群芽であって, $\{e\}$ 以外の G の正規部分群を含まない. また K_ξ は群芽 G の部分群芽 H による一つの左剰余類である. 逆に G の部分群芽 H による一つの左剰余類を K とすれば, すべての $x\in K$ に対する変換 φ_x 達は点 α を Γ の同一の点に写像する. 従って推移的なリー変換群芽の研究はリー群芽 G と $\{e\}$ 以外の G の正規部分群芽を含まないその部分群芽 H の対の研究に帰着される. また対 G, H を考えることは実リー代数 R とその部分リー代数 S で $\{0\}$ 以外の R のイデアルを含まないものを考えることと同値である. このような対 R, S が任意に与えられたとき, それらに対応する群芽 G, H を構成することができる.

また群芽 G の作用する開集合 Γ としては左剰余類の空間 G/H を考えればよい.

一方，リー群芽 G が大域的リー群 G^* の単位元の近傍であるとき，部分群芽 H を G^* の大局的部分群 H^* の単位元近傍とすることは一般にはできない（例 103 参照）. 従ってこの場合には，局所的な考察と大域的な考察の間に非常な相異があることになる. リー群自身のみを考えたときは，これに対して任意のリー代数に対し大域的なリー群が対応したのであった.

例 102. G をベクトル空間 Γ の 1 次変換の作る群芽とする. G のリー代数は Γ をそれ自身の中へ写す 1 次変換で G 中の曲線に接するもの，即ち

$$a = \frac{d}{dt}\varphi_{x(0)} \tag{25}$$

で定まる 1 次変換の全体より成る（§ 54, B）参照）. 座標成分で表わすと，1 次変換 φ_x は

$$\eta^j = \varphi_i{}^j(x)\xi^i \tag{26}$$

と書かれる. いま，$x(t)$ が a というベクトルを接ベクトルとする曲線としよう. (26) の x に $x(t)$ を代入して $t=0$ において t で微分すれば

$$\psi^j(\xi, a) = a_i{}^j\xi^i \tag{27}$$

となる（A）参照）. 従って R の各元 $a = \|a_j{}^i\|$ に対しては Γ のベクトル場 $\psi(\xi, a)$ が対応する. 但し $\psi(\xi, a)$ は

$$\psi(\xi, a) = a(\xi) \tag{28}$$

で定義されるベクトル場である.

例 103. 例 99 で考えた単連結な大域的リー群 $G \times G$ とその 1 次元部分群芽 H' を再び取上げよう. H' は $G \times G$ のいかなる 1 次元の大域的部分群にも含まれない. 定理 97 によって H' は $G \times G$ の正規部分群芽ではあり得ない. また H' は 1 次元故 $\{e\}$ 以外の正規部分群芽を含み得ない. いま G' を $G \times G$ の適当に小さな単位元の近傍とする. このとき対 G', H' は一つの推移的なリー変換群芽を定義する（C）参照）. ところがこの変換群芽は大域的な変換群の一部分と見ることはできない. それは H' は $G \times G$ の 1 次元の大域的な正規部分群に含まれないからである.

第11章　コンパクト・リー群の構造

この章ではコンパクト・リー群の性質を非常に詳しく研究し，特にその分類を行う．

まず第一に与えられた実リー代数 R が，あるコンパクト群のリー代数となるための必要かつ十分な条件を求める．この条件は随伴群（§ 54, F）参照）に関し不変な内積 (u, v) が R に定義されることである．随伴群に関し不変という条件は

$$([x, u], v) + (u, [x, v]) = 0\,; \quad (x \in R,\ u \in R,\ v \in R) \tag{1}$$

と書ける．この性質を有するリー代数をこの章では**コンパクト・リー代数**と呼ぶことにする．

コンパクト・リー代数 R はその中心 R_0 とコンパクト準単純リー代数 R' の直和となることが証明される．R' は可換でないコンパクト単純リー代数 $R_1, \cdots, R_k$ の直和となる．R のイデアル $R_0, R_1, \cdots, R_k$ は一意的に定まる．この極めて初等的な議論により，コンパクト・リー代数の分類はコンパクトで非可換な単純リー代数の分類に帰着される．

コンパクト・リー代数の更に深い性質，特にその分類を研究するために，任意のリー代数 R に対して，R に対し一意に定まるような**内積** (u, v) を定義する．そのために $u \in R$ に対し R から R の中への一次変換 p_u を $p_u(x) = [u, x]$（§ 54, E）参照）で定義する．R の 2 元 u, v の内積は 1 次変換 $-p_u p_v$ のシュプールで定義する．即ち：

$$(u, v) = -\operatorname{Sp} p_u p_v \tag{2}$$

である．極めて初等的に実リー代数 R がコンパクト準単純となるのは，(2)で定義される内積によりベクトル空間 R が Euclid 空間となるときで，かつそのときに限ることが証明される．(2)で定義される内積は R のすべての自己同型写像で不変だから，コンパクト準単純リー代数 R の自己同型群 G_A はコンパ

クト・リー群となる．極めて初等的に証明されるにも拘らず非常に注目すべきことには，G_A のリー代数は初めのコンパクト準単純リー代数と同型となる．これによって§54の結果と独立に，与えられたコンパクト準単純リー代数を持つ大域的なコンパクト・リー群の存在が証明される．以上が§61の内容である．

さて，このとき一体コンパクト・リー代数がコンパクトでない連結リー群のリー代数となることがあるか，或は同じことであるが，二つの局所同型な連結リー群の一方がコンパクトで，一方がコンパクトでないということがあり得るかという極めて重要な問題が自然に生ずる．すぐにわかるように，コンパクト・リー代数 R の中心が $\{0\}$ でなければ R はまた或るコンパクトでない連結リー群のリー代数となる．Weylの極めて重要な深い結果によると，コンパクト準単純なリー代数 R を持つすべての連結リー群，特に単連結リー群 $\tilde{G}$ はコンパクトである．従って $\tilde{G}$ の中心は有限群であり，従って $\tilde{G}$ と局所同型な連続群は高々有限箇しか存在しない．このWeylの定理は§64で証明される．その前に§62, §63でコンパクト準単純リー代数の十分詳しい研究を行う．

§58で既に実準単純リー代数の分類は複素準単純リー代数の分類とそのすべての実形を求めることに帰着することを述べた．更に任意の複素準単純リー代数は同型を除き唯一つのコンパクトな実形を有することが証明される．複素準単純リー代数の実形を求めることは頗る複雑な問題であるがCartanにより解決された(〔7〕参照)．それは複雑な幾何学的な構成によるのであって，リー群の一応完全な体系の外にあるものである[1]．通常リー群の本では複素リー代数の分類のみを行ない，その実形の分類迄は実行しない．一方から言うと複素リー代数の分類は何等位相群の理論ではない．それは複素リー代数を分類しても，それだけでは［位相的に簡単に定義される］位相群の［一つの類の］分類をしたことにならぬからである．

この章ではWeylが複素準単純リー代数に対して展開したルート系の方法(〔45〕参照)を一般な形でなく実コンパクト準単純リー代数に対してのみ適用する．このように制限を付けることによりWeylの方法は多少簡単になる．そ

訳註 1) 〔10〕には代数的な方法による実単純リー代数の分類がなされている．

れはコンパクト・リー代数に対し存在する不変な正の定符号2次形式のお陰で単因子の理論を一般の形で用いる必要がなく，唯歪対称行列に対してのみ用いればよいからである．同時にこの方法の主な特徴は保存され，この単純化のお陰で一層大きな結果さえ得られる．このようにしてコンパクト準単純リー代数の分類が得られ，それから直ちにコンパクト・リー群の分類が導かれる．

コンパクト単純リー代数の分類の最後の段階では，Dynkin により発見された方法を用いる．しかし彼の単純ルート・ベクトルの方法を全面的に用いることはしなかった．

分類の最終的な結果は次の通りである：

任意のコンパクト非可換単純リー代数は四つの**典型リー代数**の無限系列

$$A_n,\ n\geqq 1;\quad B_n,\ n\geqq 2;\quad C_n,\ n\geqq 3;\quad D_n,\ n\geqq 4 \qquad (3)$$

の中の一つに同型であるか，五つの**例外リー代数**

$$G_2,\quad F_4,\quad E_6,\quad E_7,\quad E_8 \qquad (4)$$

の一つに同型である．またここで(3)及び(4)に現われるすべてのリー代数は互に同型でない．

この結果は Killing (〔17〕参照) により発見された．Cartan (〔6〕参照) は Killing によって与えられた証明中の問題となる点を正して完全なものとした．既に前に述べたように Killing 及び Cartan は複素単純リー代数に対して証明したのである．

ここでは五つの例外リー代数について詳細に述べなかったので，その存在の証明も筋書だけしか述べなかった．しかしそれらのルート系の構成のみでそれらの一意性に関しては問題は解決する．例外リー代数の記述には余りに多くの頁を必要とするが，ルート系による構成は非常に簡明である．

§61.　コンパクト・リー代数

ある一つのコンパクト・リー群のリー代数と同型なリー代数を**コンパクト**であるという．次に与えられたリー代数がコンパクトとなるための必要かつ十分なる条件を求めよう．この条件を言い表わすためにリー代数 R における**不変**

2次形式という概念を導入する. リー代数 R の上の2次形式[1] $\psi(u, u)$, $u \in R$ が不変であるとは R の随伴群 L (§54, F)参照)の任意の変換により不変なることとする. 即ち $l \in L$ ならば $\psi(l(u), l(u)) = \psi(u, u)$ がすべての $u \in R$ について成立つことである. リー代数 R がコンパクトなるための必要かつ十分条件は R に不変な正の定符号2次形式の存在することであることが示される. コンパクト・リー代数 R は不変2次形式を有することを使うと, R は中心 R_0 とコンパクト準単純リー代数 R' の直和になることが判る. この R' はまた非可換なコンパクト単純リー代数の直和となる. かくしてコンパクト・リー代数の分類はコンパクト単純リー代数の分類に帰着する.

この§ではまたコンパクト準単純リー代数 R のすべての自己同型の作る群 G_A のリー代数はもとの R と同型であることを証明する. これは与えられた実リー代数を有する大域的リー群が存在するかどうかという問題をコンパクト・リー代数の場合に肯定的に解決するものである. 準単純リー代数の中心は0であるから, 対応するリー群芽が一意的であることが§54の結果からいえる(§54, G)参照). 故に与えられたコンパクト準単純リー代数を有する大域的リー群の存在は§§55, 56の結果を使わずに証明できる. もちろんコンパクト・リー代数を有するリー群がコンパクトでないこともあり得る. 例えばベクトル群のリー代数は可換故コンパクト・リー代数である. しかしながら準単純リー代数では事情は全く異なり, コンパクト準単純リー代数を有する連結リー群はすべてコンパクトであることが示される. この重要な Weyl の定理は§64で証明される.

リー代数の交換子積 $[a, b]$ は通常の(3次元空間における)ベクトルの外積に

訳註 1)　体 K 上のベクトル空間 V に対し $V \times V$ 上で定義された K の値をとる函数 $\phi(x, y)$ が任意の $x, y, z \in V$, $a, b \in K$ に対し, 1) $\phi(ax + by, z) = a\phi(x, z) + b\phi(y, z)$, 2) $\phi(x, ay + bz) = a\phi(x, y) + b\phi(y, z)$ をみたすとき, V 上の双1次形式という. V 上の双1次形式がすべての $x, y \in V$ に対し 3) $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ をみたすとき対称な双1次形式という. また V 上で定義され K の値をとる函数 $Q(x)$ は V 上の対称な双1次形式 ϕ が存在して, $\phi(x, x) = Q(x)$ となるとき Q を V 上の2次形式という. また実数体上のベクトル空間 V 上の2次形式 $Q(x)$ は $x \neq 0$ ならば常に $Q(x) > 0$ なるとき正の定符号2次形式または正の2次形式という.

似た性質を持っている．リー代数にはまたその外に対称な**双1次形式**(**内積**)即ちその基本双1次形式が導入される．この基本双1次形式は単に随伴群に関し不変なるのみならず R のすべての自己同型に対して**不変**となる．基本双1次形式はリー代数の研究に極めて重要な役割を果たす．基本双1次形式を使ってCartanはその有名なリー代数の準単純性及び可解性(定義49参照)に関する判定条件を述べた．即ちリー代数が準単純となるのはその基本双1次形式が縮退しないとき，かつそのときに限り[1]，またリー代数が可解になるのは (u, u) が恒等的に0になるとき，かつそのときに限る．ここではこの判定条件を，コンパクト・リー代数の場合には基本双1次形式に関して全体と直交する元の全体が中心と一致するという定理101によって，コンパクト・リー代数に対してのみ証明する．更にコンパクト準単純リー代数の基本2次形式は正の定符号の2次形式を与えることも示される．この最後の結果はコンパクト・リー代数の複素化として現われる複素単純リー代数の分類を非常に簡明にする．このことは§62で使われる．

A) 実リー代数 R に対称双1次形式 $\psi(u, v)$, $(u \in R, v \in R)$ が与えられたとき，R の随伴群芽 L，即ち随伴群の単位元の近傍の各元 l に対して

$$\psi(l(u), l(v)) = \psi(u, v)$$

をみたすとき，ψ は随伴群に関して不変，或は単に不変であるという．全く同様に R 上の2次形式 $\psi(u, u)$ が**随伴群に関して不変**である，或は単に**不変**であるというのは，すべての $l \in L$ に対し

$$\psi(l(u), l(u)) = \psi(u, u)$$

が成立つことをいう．対称双1次形式は対応する2次形式を定め，逆も成立つから，この二つの内一方が不変なら他も不変である．さて，双1次形式 $\psi(u, v)$ が不変なるためには，任意の $a \in R$ に対して

$$\psi([a, u], v) + \psi(u, [a, v]) = 0 \qquad (1)$$

が成立つことが必要かつ十分である．

訳註 1) V 上の対称な双1次形式 $\phi(x, y)$ が縮退しないとは，すべての $x \in V$ に対し $\phi(x, y) = 0$ となる $y \in V$ は0に限ることを意味する．

この条件を証明しよう．R をリー代数とするリー群芽を G とし，$l(t)=l_t$ を L の1径数部分群でその原点における接ベクトルが $p_a[=ad\,a]$ なるものとする．$\psi(u,v)$ が不変ならば

$$\psi(l_t(u), l_t(v)) = \psi(u, v)$$

が成立つから，$t=0$ において微分すると，$\psi(p_a(u), v)+\psi(u, p_a(v))=0$ となり，これは(1)と同じものである．逆に(1)なる条件がみたされているとしよう．任意の t における $\psi(l_t(u), l_t(v))$ を計算してみると，§54,(3)式と§54, F)により

$$\frac{d}{dt}l_t(u) = [a, l_t(u)]\,;\ \frac{d}{dt}l_t(v) = [a, l_t(v)],$$

従って

$$\frac{d}{dt}\psi(l_t(u), l_t(v)) = \psi([a, l_t(u)], l_t(v)) + \psi(l_t(u), [a, l_t(v)]) = 0$$

((1)式参照)．従って $\psi(l_t(u), l_t(v))$ は t に無関係であり，従って $\psi(u,v)$ は不変である．それはリー群芽 L の任意の元を通る1径数部分群が存在するからである．

次の定理はコンパクト・リー代数を特徴づける一つの性質を与えるもので，これによりコンパクトなリー代数の研究は非常に簡単になる．

定理 99. 任意のコンパクト・リー代数 R 上には正の定符号2次形式で随伴群に対し不変なものが存在する(A)参照)．

証明. いま，R はコンパクト・リー群 G のリー代数とする．$\varphi(u,u)$ を R 上の任意の正の定符号2次形式とする．いま，$x\in G$ に対して $\varphi_x(u,u)=\varphi(l_x(u), l_x(u))$ とおく ($x\rightarrow l_x$ は G の随伴表現である)． G の元 x を固定したときベクトル $u\in R$ の函数 $\varphi_x(u,u)$ は R 上の正の定符号2次形式を与える．$u\neq 0$ を固定すると $\varphi_x(u,u)$ は $x\in G$ の連続な実数値函数で，その値は常に正である．従ってベクトル $u\in R$ の函数 $\psi(u,u)$ を

$$\psi(u, u) = \int_G \varphi_x(u, u)\,dx$$

(§29参照)で定義すれば，ψ は R 上の正の定符号2次形式である．この ψ が随伴群 L に関し不変なることを示そう．任意の $y\in G$ に対して

$$\psi(l_y(u), l_y(u)) = \int_G \varphi(l_{xy}(u), l_{xy}(u))\,dx = \int_G \varphi(l_x(u), l_x(u))\,dx = \psi(u, u)$$

となるから，定理99は証明された．

B)　実リー代数 R が不変な正の定符号2次形式を有すれば，R の任意のイデアル S は直和因子となる．即ち S に対して R のイデアル T が存在して $R = S+T$, $S \frown T = 0$ となる．

これを証明しよう．$\psi(u, u)$ をその不変正定符号2次形式とする．いま，この2次形式に関する S の直交補空間を T とする．換言すれば T はすべての $u \in S$ に対して $\psi(u, v) = 0$ となる R の元 v の全体である．このときもちろん $S \frown R = 0, S + T = R$ が成立つ．いま T が R のイデアルなることを示そう．$a \in R, v \in T$ とし u を S の任意の元とすると，(1)により

$$\psi(u, [a, v]) = -\psi([a, u], v) = 0$$

となる．$[a, u] \in S$ だからである．従って $[a, v] \in T$ で T はイデアルとなる．

定理100.　R が実リー代数で不変な正の定符号2次形式を有するとする．このとき R はその中心 R_0 と非可換な単純リー代数 $R_1, \cdots, R_k$ の直和となる．そしてこの直和分解は一意である．即ち $R_0, R_1, \cdots, R_k$ は R により一通りに定まる．また中心 R_0 は R の根基即ち最大可解イデアルと一致する．

証明.　まず第一に R 上の不変双1次形式は R の任意の部分代数 R' 上の双1次形式と考えたときもやはり不変であることに注意しておこう((1)参照).

B)により R はその中心 R_0 とイデアル T の直和になる．このときもちろん T の中心は0である．リー代数 T は上の注意によりまた不変な正の定符号2次形式を有するから，再びB)による直和分解が可能である．従ってリー代数 T が単純でなければ，それはまた二つのイデアルの直和になる．この過程を繰返してリー代数 R のイデアル $R_0, R_1, \cdots, R_k$ への直和分解で，$R_1, \cdots, R_k$ は非可換な単純リー代数となるものが存在することが判る．$i>0$ なるとき，R_i が非可換なことは，R_i が可換ならば $R_0 + R_i$ が R の中心に含まれることになるが，それは［$S \frown T = 0$ 故］明かに不可能であることから判る．次にこの分解の一意性を証明しよう．いまリー代数 R の同様なイデアル $R_0, R_1', R_2', \cdots, R_l'$ への直和

分解が存在したとしよう．いま，$0 \neq a \in R_i'$, $i \geqq 1$ とする．R_i', $i \geqq 1$ は中心が 0 故 $b \in R_i'$ が存在して $[a, b] \neq 0$ となる．いま

$$b = b_0 + b_1 + \cdots + b_k$$

を b のイデアル $R_0, R_1, \cdots, R_k$ に関する分解とする．即ち $b_i \in R_i$, $i \geqq 0$ とする．$[a, b_0] = 0$ 故 $c = [a, b_j] \neq 0$ なる如き $j \geqq 1$ が存在する．c は $R_i' \cap R_j$ に含まれる．一方 $R_i' \cap R_j$ は R_i', R_j のイデアルであるから，この二つのイデアルの単純性により $R_i' = R_j$ である．かくして任意の R_i', $i \geqq 1$ は或る R_j, $j \geqq 1$ と一致することが判った．全く同様にして任意の R_m, $m \geqq 1$, は或る R_n', $n \geqq 1$, と一致する．かくしてイデアル達 $R_1, \cdots, R_k$ とイデアル達 $R_1', \cdots, R_l'$ の間に 1 対 1 の対応がつき，この二つのイデアルの集合が一致することが判る．

次に S を R の最大可解イデアルとして $S = R_0$ を証明しよう．R_0 は R の可解イデアルであるから $R_0 \subset S$ である．いま $R_0 \neq S$ と仮定しよう．然らば R_0 に含まれない S の元 s が存在する．s は中心に属さないのだから $R_1, \cdots, R_k$ の中の少なくとも一つのイデアル R_i, $i \geqq 1$, の元 a との交換子が 0 でない．元 $c = [a, s] \neq 0$ は $S \cap R_i$ に属する故 $R_i \cap S \neq 0$ となる．一方 R_i は単純リー代数だから $R_i \cap S = R_i$ 即ち $R_i \subset S$ となる．従って R_i は可解リー代数 S のイデアルとしてまた可解となる．従って R_i は同時に可解で且つ単純故，1 次元で可換となる．これはR_i が非可換という仮定に反する．従って R_0 は R の最大可解イデアルでなければならない．

これで定理 100 は証明された．

これから任意のリー代数 R に R のすべての自己同型で不変な双 1 次形式として一つの**内積**(u, v)，$(u \in R, v \in R)$ を導入しよう．この内積はリー代数の研究で重要な役割を演ずるものである．

いま，R をベクトル空間とする．R の 1 次変換 p のシュプール $\mathrm{Sp}(p)$ とは，よく知られたように変換 p を任意に選んだある座標系に関する行列 $\|p_j^i\|$ で表わしたとき $\mathrm{Sp}(\mathrm{p}) = p_\alpha^\alpha$ [1] で与えられるものである．直ちに確かめられるように，1 次変換 p のシュプール $\mathrm{Sp}(p)$ は上でその定義に使った R の座標系のと

訳註 1) 総和記法を用いている事に注意．即ち $\mathrm{Sp}(p) = p_1^1 + p_2^2 + \cdots + p_n^n$ である．

り方によらない．また二つの1次変換 p_1, p_2 の積のシュプールはその積の順序によらないこと，即ち

$$\mathrm{Sp}(p_1p_2) = \mathrm{Sp}(p_2p_1) \tag{2}$$

なることも容易に証明される．

C)　任意のリー代数 R に対しその随伴リー代数を P とする(§54, E)参照)．R の2元 a, b に対し

$$(a, b) = -\mathrm{Sp}(p_a p_b) \tag{3}$$

と定義する．直ちに判るように，このようにして定義された R 上の双1次形式は R 上で定義された対称な双1次形式である((2)参照)．これを R の**基本双1次形式**［または **Killing 形式**］という．座標成分を使って書けば基本双1次形式は

$$(a, b) = -c_{\alpha j}{}^{i} c_{\beta i}{}^{j} a^{\alpha} b^{\beta} \tag{4}$$

と書かれる(§52, (17)式参照)．§54の(15)式から R の任意の自己同型 φ に対して

$$(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b) \tag{5}$$

が成立つ．従って基本双1次形式は不変な双1次形式であるから，R の任意の3元 a, u, v に対して

$$([a, u], v) + (u, [a, v]) = 0 \tag{6}$$

が成立つ((1)参照)．

D)　いま，実リー代数 R の上に不変な正定符号2次形式 $\psi(u, u)$ が与えられているとしよう(A)参照)．R の基底を適当に取って

$$\psi(u, u) = u^1u^1 + \cdots + u^r u^r \tag{7}$$

となる如くする．この基底に対する R の構造定数を $c_{jk}{}^{i}$ とし

$$c_{ijk} = c_{jk}{}^{i} \tag{8}$$

とおけば，構造定数 c_{ijk} はそのどの二つの添数についても歪対称なることが判る．即ち

$$c_{ijk} = c_{jki} = c_{kij} = -c_{jik} = -c_{kji} = -c_{ikj}. \tag{9}$$

これを証明しよう．条件(1)を座標成分の式に書直すと

$$0 = c_{ijk}a^j u^k v^i + c_{ijk}u^i a^j v^k = a^j u^k v^i (c_{ijk} + c_{kji})$$

が得られるから $c_{ijk} = -c_{kji}$ でなくてはならない．この結果と§52の(18)式から(9)が得られる．

定理 101.　不変な正の定符号2次形式を有する実リー代数 R において，基本双1次形式に関して R と直交する R の元の全体を R_0 とする．このとき，R_0 は R の中心と一致する．また R_0 が0ならば基本2次形式は R 上の正の定符号2次形式である．

証明.　いま，与えられた R 上の不変正定符号2次形式 $\psi(u, u)$ が(7)の形となるように R の基底を取っておく．このように基底を選んだとき，基本2次形式 (a, a) は次の形に書ける．

$$(a, a) = -\sum_{i,j} c_{i\alpha j}c_{j\beta i}a^\alpha a^\beta = \sum_{i,j}(c_{i\alpha j}a^\alpha)(c_{i\beta j}a^\beta) = \sum_{i,j}(c_{i\alpha j}a^\alpha)^2 \qquad (10)$$

((4)及び(9)参照)．この式の右辺は自乗の和故，$a \in R_0$ ならば

$$c_{i\alpha j}a^\alpha = 0$$

が成立つ．従って，任意の $b \in R$ に対して $[a, b]^i = c_{\alpha j}{}^i a^\alpha b^j = (c_{i\alpha j}a^\alpha)b^j = 0$ 故 $[a, b] = 0$ となり，a が R の中心に含まれることが判る．逆に a が中心の元ならば $p_a = 0$ 故任意の $b \in R$ に対して $(a, b) = -\mathrm{Sp}(p_a p_b) = 0$ となる．従って R_0 は R の中心と一致する．$R_0 = 0$ となる場合は内積 (a, a) は縮退しない2次形式故，(10)式により (a, a) が正の定符号2次形式なることが判る．

これで定理101が証明された．

定理 102.　実リー代数 R の基本2次形式 $(a, a) = -\mathrm{Sp}(p_a p_a)$ が正定符号ならば R の自己同型群 G_A はコンパクトであり，そのリー代数 R_A は R の随伴リー代数 P と一致する．R は中心が0故（定理101参照）R と P は同型である．自己同型群 G_A の中心及び G_A の単位元成分 G の中心は共に単位元のみより成る．

注意.　この定理は次に示す如く与えられたリー代数を有するリー群芽の存在定理（定理88）を使わずに証明される．従って定理102は実リー代数が正定符号の基本2次形式を有するとき，それをリー代数とする大域的なリー群の極めて直接的な一つの構成法を与えるものである(C)参照)．

証明.　G^* を R の基本双1次形式 (u, v) (C)参照)を不変にするすべての1次

変換の作る群とする．(u, u) が正定符号だから G^* はコンパクトである．実際 G^* は R の次元数に等しい次数の直交行列全体の作る群と同型である．R の自己同型群 G_A はもちろん G^* の部分群故またコンパクトである．G_A のリー代数 R_A が P と一致することを証明するために P が R_A のイデアルなることを注意しておこう（§54, E）参照）．R_A はコンパクト群 G_A のリー代数故イデアル P は直和因子で（定理99及び B）参照）R_A はイデアル P とあるイデアル Q の直和となる．イデアル Q が0だけから成ることを証明しよう．そうすれば $P=R_A$ が成立つことになる．いま $q \in Q$ とすれば，$[q, p_a]=0$ であるから §54 の (14) 式により $p_{q(a)}=0$ となり $q(a)$ は R の中心に含まれる．所が R の中心は0だけだから，$q(a)=0$ がすべての $a \in R$ に対し成立ち，従って $q=0$ となる．

次に G 及び G_A の中心は0のみより成ることを証明しよう．いま φ を G または G_A の中心に属する元とする．a を R の任意の元とし，$x(t)$ をその接ベクトルが p_a である G の曲線とする．$\varphi x(t) \varphi^{-1} = x(t)$ となるから，この式を $t=0$ で t について微分すると，$\varphi p_a \varphi^{-1} = p_a$ が得られる故，§54, (15) 式により，$p_{\varphi(a)} = p_a$ 即ち $\varphi(a) = a$ となるが，a は R の任意の元故 φ は恒等写像即ち G_A の単位元 e に等しい．

これで定理102が証明された．

定理 103．実リー代数 R がコンパクトであるための必要かつ十分な条件は随伴群で不変な正の定符号2次形式が R に存在することである．

証明．定理99によりコンパクト・リー代数は不変な正定符号2次形式を有する．今度はリー代数 R が不変正定符号2次形式を有するとして，R と同型なリー代数を有するコンパクト・リー群の存在することを証明しよう．定理100により R は中心 R_0 と非可換単純リー代数 $R_1, R_2, \cdots, R_k$ の直和となる．さてリー代数 R_0 と $R' = R_1 + \cdots + R_k$ は，それぞれあるコンパクト群 G_0 と G' のリー代数と同型なることを示そう．これが言えれば G_0 と G' の直積はまたコンパクトで，そのリー代数は R に同型故我々の定理が証明されたことになる．

いま，D を実数の加法群とし，N を整数全体の作る D の部分群とする．剰余群 $K=D/N$ はコンパクトな1次元の可換リー群である．s を R_0 の次元とする

とき，K と同型な群の s 箇の直積 G_0 はコンパクトな可換リー群でその次元が s 故 G_0 のリー代数は R_0 と同型である．

群 G' としては準単純リー代数 R' の自己同型群をとればよい．定理 101，102 により G' はコンパクトでそのリー代数 P' は R' に同型である．

これで定理 103 は証明された．

E) 実リー代数 R がコンパクト準単純となるための必要かつ十分な条件はその基本 2 次形式が正定符号なることである（C）参照）．E) の成立つことは定理 99，100，101，103 から直ちに結論される．

以下の § では専らコンパクト準単純リー代数を取扱う．

定理 102 から与えられたコンパクト準単純リー代数を持つリー群の存在が保証される．この場合一意性も成立つ．定理 102 と同様次の一意性に関する定理も § 56 の結果を用いることなく証明される．

F) R をコンパクト準単純リー代数，G を R の自己同型群 G_A の単位元成分とする．定理 102 によって G は R と同型なリー代数を有し中心が e のみより成る群である．G' が R と同型なリー代数を有する任意のリー群とすれば，G' は G と局所同型である．特に G' の中心が e のみより成るときは G' は G と一致する．

この命題 F) は § 54 G) と第 9 章の結果から直ちに証明される．

例 104. R を 3 次元 Euclid ベクトル空間とする．既に注意したように R の二つのベクトルの交換子 $[a, b]$ として，それらのベクトル積をとれば R はリー代数となる．簡単な計算によりリー代数 R の内積即ち基本双 1 次形式は座標成分で書いたとき $(a, b) = 2\,(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)$，即ちベクトルの通常の内積の 2 倍であることが判る．従ってリー代数 R は，その内積が正定符号故コンパクト準単純リー代数である．定理 101 により R は非可換な単純イデアルの直和となるはずであるが，1 次元のリー代数は常に可換故［R が二つの 0 でないイデアルの直和となることはなく］R は単純である．いま，G_A を R の自己同型群とする．R の任意の自己同型はその内積を不変にするから G_A の元はベクトル空間 R の直交変換のみより成る．容易に知られるように正の行列式を有する

任意の直交変換 p はベクトル積を保ち [即ち $p([x,y]) = [px, py]$ である]，負の行列式を持つ任意の直交変換はこれを保たない．従って群 G_A は (3次元) Euclid ベクトル空間 R の廻転群に他ならない．定理102により群 G_A のリー代数 R_A は R と同型である．このことは前にも注意した (例93参照)．

§62. コンパクト準単純リー代数のルート系

この§ではコンパクト準単純リー代数 R のルート系を構成する．ルート系は R の非常に直観的な幾何学的不変系 (*invariant*) で R を一意に定めるものである．

ルート系の構成法は一般に次の通りである．$a \in R$ に対し p_a を a に対応する随伴リー代数の元，即ち $p_a(x) = [a, x]$ で定義されるベクトル空間 R の1次変換とする．$[a, a] = 0$ 故1次変換 p_a は常に0を固有値として持つ．1次変換 p_a の固有値0の重複度は a により異なる．この重複度の最小値 n をリー代数 R の**階数**という．R の元 c で p_c の固有値0の重複度が R の階数 n に等しいものを R の**正則元**という．ルート系を構成するにはまず R の任意の正則元 c を一つとって固定する．$[c, x] = 0$ をみたす $x \in R$ の全体 S はリー代数 R の n 次元の可換部分代数である．これを R の**正則部分代数** [または **Cartan subalgebra**] という．このとき，任意の1次変換 p_s, $s \in S$ は共通の固有ベクトルを有し，その固有値はベクトル空間 S 上の1次形式で純虚数の値をとる．S は R に存在する内積 (§61, C) 参照) 即ち基本双1次形式により Euclid ベクトル空間となり，従ってベクトル空間 S 上の任意の実数値1次形式 $f(s)$ は内積 (α, s) の形に書ける．但しここで α は S のベクトルで与えられた1次形式 f により定まるものである．従って，1次変換 p_s の固有値は $i(\alpha, s)$ なる形となる．ここで α は固有値により定まるベクトルで，**ルート・ベクトル**と呼ばれる．S に属するすべてのルート・ベクトルの全体 Σ を R の**ルート系**という．その定義に用いた R の正則元 c の選び方を変えるとき異なるルート系が生じ得る．しかし R の二つの異なるルート系は常に合同であることが証明される．この事実は§64で証明する．更に二つのコンパクト準単純リー代数が合同なルート系を有すると

きは，この二つのリー代数は同型であることが証明される．この証明は§63で行う．

この§ではいつもコンパクト準単純リー代数，即ちその基本2次形式が正定符号であるリー代数のみを扱うから，以下一々ことわらない．

1次変換 p_a の固有値が純虚数であるから，我々は実ベクトル空間 R の複素化 $[R]$ を考える必要が生ずる（§58, C）参照）．φ が空間 R の上の1次形式なるときは，$[R]$ 上では φ を $\varphi(x+iy)=\varphi(x)+i\varphi(y)$ で定義する．また p が R 上の1次変換ならば，$[R]$ 上では $p(x+iy)=p(x)+ip(y)$ で p を定義する．また，$\psi(x_1, x_2)$ が R 上の双1次形式ならば，$[R]$ 上では ψ を $\psi(x_1+iy_1, x_2+iy_2)=\psi(x_1, x_2)-\psi(y_1, y_2)+i\psi(x_1, y_2)+i\psi(y_1, x_2)$ で定義する．もしも R 上の2次形式 $\psi(x, x)$ が正の定符号ならば $[R]$ 上の Hermite 形式 $\psi(z, \bar{z})$ も正の定符号で，0になるのは $z=0$ のときに限る．

ここで一つのベクトル空間をそれ自身の中へ写す1次変換の固有値及び固有ベクトルについての二三の概念を想起して置こう．R を任意の体 K 上のベクトル空間とし，p を R から R の中への1次変換とする．体 K の元 λ は R の0でない元 x（**固有ベクトル**という）が存在して

$$p(x)=\lambda x \tag{1}$$

なる関係をみたすとき，p の**固有値**という．R に勝手な基底をとったとき1次変換 p が行列 $\|p_j{}^i\|$ で表わされたとすれば，関係式（1）の座標成分の形は

$$p_a{}^i x^a=\lambda x^i \tag{2}$$

となる．従って $\lambda\in K$ が1次変換 p の固有値となるための必要かつ十分なる条件は，λ が

$$\chi(\lambda, p)=0 \tag{3}$$

なる関係をみたすことである．但しここで $\chi(\lambda, p)$ は1次変換 p の固有多項式であって

$$\chi(\lambda, p)=|\lambda\delta_j{}^i-p_j{}^i| \tag{4}$$

で定義される．

A） R を Euclid ベクトル空間とする．R をそれ自身の中へ写す1次変換 p

は，次の関係式をみたすとき**歪対称**といわれる．

$$(p(u), v) + (u, p(v)) = 0\,;\ u\in R, v\in R. \tag{5}$$

歪対称1次変換の固有値はすべて純虚数であることが証明される．

実際λを歪対称1次変換pの固有値とすれば，0でないベクトル$z\in[R]$が存在して

$$p(z) = \lambda z \tag{6}$$

となるから

$$p(\bar{z}) = \bar{\lambda}\bar{z} \tag{7}$$

も成立つ．(6)，(7)に対してそれぞれ$\bar{z}, z$を乗じて内積を作って加えれば，

$$0 = (\lambda + \bar{\lambda})(z, \bar{z})$$

となり，$(z, \bar{z}) \neq 0$故$\lambda = -\bar{\lambda}$即ちλは純虚数となる．

B)　QをEuclidベクトル空間Aの歪対称(A)参照)な1次変換の作る一つの可換な線型リー代数とする(§54, A)参照)．すべての$q\in Q$に対し$q(x) = 0$となるような$x\in A$の全体をA_0'とする．またQ上の与えられた1次形式φに対してすべての$q\in Q$により$q(x) = \varphi(q)x$となるような$x\in[A]$の全体をA_φとする．もちろんA_0'はAの部分空間であり，A_φは$[A]$の部分空間である．更に恒等的に0なる1次形式に対して$A_0 = [A_0']$となる．A_φが0でないときφをリー代数Qの**固有1次形式**[または**weight**]といい，これに対してA_φを1次形式φに対する空間$[A]$の**固有部分空間**という．このときQの固有1次形式は常に純虚数の値をとり，φが固有1次形式ならば$-\varphi$もまた固有1次形式であり，更に$A_{-\varphi} = \bar{A}_\varphi$が成立つ．更にベクトル空間$[A]$はその固有部分空間即ち$A_{\varphi 0}, A_{\varphi 1}, \cdots, A_{\varphi k}$の直和となる．ここで$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$はリー代数$Q$の固有1次形式の全体である．

さてB)を証明しよう．直ちに判るように部分空間Bがリー代数Qで不変(即ちQに属するすべての1次変換で不変)ならば，AにおけるBの直交補空間CもまたQにより不変である．

いま，Q'をQの任意の部分代数とし，φ'をQ'上の任意の1次形式，$A_{\varphi'}$をQ'の固有1次形式φ'に関する固有部分空間とする．このとき部分空間$A_{\varphi'}$が

Q で不変なることを示そう．$x \in A_{\varphi'}$, $y = q(x)$, $q \in Q$ とし q' を Q' の任意の元とする．このとき

$$q'(y) = q'(q(x)) = qq'(x) = q(\varphi'(q')x) = \varphi'(q')q(x) = \varphi'(q')y$$

故 $y \in A_{\varphi'}$ であり，従って $A_{\varphi'}$ は Q により不変である．

次にリー代数 Q は少なくとも一つの固有1次形式を有することを示そう．証明は Q の次元に関する帰納法で行なう．0次元のリー代数に対しては，これはもちろん成立つ．いまリー代数 Q を1次元の部分代数 Q'' と部分代数 Q' の直和に分解する．帰納法の仮定から Q' には固有1次形式 φ' が存在する．いま，$A_{\varphi'}$ をこの φ' に対応する固有部分空間とする．Q'' の基底 q'' をとれば，$A_{\varphi'}$ は Q で不変故，特に q'' で不変である．いま $x \in A_{\varphi'}$ を1次変換 q'' の固有値 λ に対応する固有ベクトルとする．Q の任意の元 q は $q = q' + \nu q''$, $q' \in Q'$, ν は実数，という形をしている．従って $\varphi(q) = \varphi(q') + \nu\lambda$ と置けば，φ は Q 上の1次形式で，かつ，$q(x) = q'(x) + \nu q''(x) = \varphi'(q')x + \nu\lambda x = \varphi(q)x$ となり，φ は Q 上の固有1次形式なることが判った．

更に Q 上の任意の固有1次形式は常に純虚数の値をとることは明らかであろう．即ち，任意の $q \in Q$ に対して $\varphi(q)$ は歪対称な1次変換 q の固有値故，A) により純虚数である．また，0でないベクトル $x \in [A]$ が $q(x) = \varphi(q)x$ をみたせば，ベクトル $\bar{x}$ は $q(\bar{x}) = \overline{\varphi(q)x} = -\varphi(q)\bar{x}$ をみたす．従って任意の固有1次形式 φ に対し $-\varphi$ も固有1次形式で，$A_{-\varphi} = \bar{A}_{\varphi}$ となる．

リー代数 Q の固有1次形式の全体を $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$ とすれば $[A]$ はそれらに対応する固有空間 $A_{\varphi_0}, \cdots, A_{\varphi_k}$ の直和となることを示そう．これを A の次元についての帰納法により証明する．A が1次元なるときはもちろん成立つ．Q には少なくとも一つの固有1次形式が存在することが証明されたから，φ_0 を Q の固有1次形式としよう．このとき対応する固有空間を A_{φ_0} とすれば A_{φ_0} と $A_{-\varphi_0}$ は Q により不変であり，従ってその和 $A_{\varphi_0} + A_{-\varphi_0}$ も Q により不変である．$A_{-\varphi_0} = \bar{A}_{\varphi_0}$ 故 $A_{\varphi_0} + A_{-\varphi_0} = [B]$ となる Q に関し不変な A の部分空間 B が存在する．A における B の直交補空間を C とすると C も Q に関し不変となる．C の次元は A の次元より小さいから帰納法の仮定により $[C]$ は Q の1次形式 ψ_1,

$\cdots, \psi_l$ に対応する固有空間 $C_{\psi_1}, \cdots, C_{\psi_l}$ の直和となる．$\psi_1, \cdots, \psi_l$ は φ_0, $-\varphi_0$ とは異なる．従って $C_{\psi_1}, \cdots, C_{\psi_l}$ は $[A]$ の固有部分空間でもある．

最後に $[A]$ が Q 上の固有1次形式 $\varphi_0, \cdots, \varphi_k$ に対する固有空間 $A_{\varphi_0}, \cdots, A_{\varphi_k}$ の直和となるときは $\varphi_0, \cdots, \varphi_k$ 以外には Q の固有1次形式は存在しないことを示そう．いま $\varphi_0, \cdots, \varphi_k$ と異なる Q の固有1次形式 φ_{k+1} が存在したとしよう．然らば $\varphi_0(q), \varphi_1(q), \cdots, \varphi_k(q), \varphi_{k+1}(q)$ のどの二つも相異なるような $q \in Q$ が存在する．いま $x_{k+1} \neq 0$ を φ_{k+1} に対応する固有ベクトルとする．[$A = \sum_{i=0}^{k} A_{\varphi_i}$ 故] $x_0 + x_1 + \cdots + x_{k+1} = 0$ となる如き $x_i \in A_{\varphi_i}$ が存在する．この式に1次変換 q を作用させると

$$\sum_{i=0}^{k+1} \varphi_i(q) x_i = 0$$

を得る．この式と $\sum_{i=0}^{k+1} x_i = 0$ から [$\sum_{i=0}^{k} (\varphi_i(q) - \varphi_{k+1}(q)) x_i = 0$ を得る故] x_0, $x_1, \cdots, x_k$ の間に trivial でない1次従属関係が成立つことになるが，これは [$A = \sum_{i=0}^{k} A_i$ が直和故] 不可能である．従って B) が証明された．

C)　q_0 を Euclid ベクトル空間 A の歪対称な1次変換とする．1次変換 q_0 の任意の固有値 λ_i に対し $q_0(x) = \lambda_i x$ となる如き $[A]$ の元 x の全体を A_{λ_i} で表わす．このとき $[A]$ の部分空間 A_{λ_i} の [複素数体上の] 次元は q_0 の固有多項式 $\chi(\lambda, q_0)$ の根 $\lambda = \lambda_i$ の重複度に等しい．

これを証明するために Q を νq_0, ν は実数，の如き形の A の1次変換の全体とする．いま，$\varphi_i(q) = \varphi_i(\nu q_0) = \nu\lambda_i$ とすれば $A_{\varphi_i} = A_{\lambda_i}$ である．従って，B) により $[A]$ は部分空間 $A_{\lambda_0}, \cdots, A_{\lambda_k}$ の直和となる．ここで $\lambda_0, \cdots, \lambda_k$ は q_0 の [相異なる] 固有値の全体である．いま，$A_{\lambda_0}, \cdots, A_{\lambda_k}$ の基底をあわせて $[A]$ の基底とすれば，明らかに次式が得られる．

$$\chi(\lambda, q_0) = (\lambda - \lambda_0)^{n_0} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

ここで n_i は A_{λ_i} の次元を表わす．

[これで C) は証明された．]

定理 104.　R をコンパクト準単純リー代数とし，$a \in R$ に対し S_a を $[a, x] = 0$ をみたす $x \in R$ の全体の作る集合とする．容易に証明される如く S_a は R の部分

代数で $\{0\}$ ではない. S_a の次元は a により異なる. 種々の a に対する S_a の次元の最小値 n をリー代数 R の**階数**という. R の元 c は S_c の次元が階数 n に等しいとき R の**正則元**であるといわれる. このとき S_c を**正則部分代数** [または **Cartan subalgebra**] という. R の正則部分代数は皆可換部分代数である.

証明. まず S_a が R の部分代数であることを証明しよう. $x \in S_a$, $y \in S_a$ ならば, §52, (16)式により

$$[a, [x, y]] = [[a, x], y] + [x, [a, y]] = 0.$$

従って $[x, y] \in S_a$.

次に使うために [コンパクト・リー代数] R の随伴リー代数の元はすべて歪対称なることを注意しておく (§61, (6)参照).

いま R の次元を r とし, $a^1, \cdots, a^r$ を (R の一つの基底に対する) $a \in R$ の座標成分とする. 1次変換 p_a ((4)参照) の固有多項式 $\chi(\lambda, p_a)$ は, 容易に判る通り $\lambda, a^1, \cdots, a^r$ に関する r 次の斉次多項式である. この多項式は, $p_a(a) = [a, a] = 0$ 故その根の少なくとも一つが 0 である. 従って $\chi(\lambda, p_a)$ は

$$\chi(\lambda, p_a) = \lambda^r + \chi_1(a)\lambda^{r-1} + \cdots + \chi_{r-n}(a)\lambda^n, \quad n > 0 \qquad (8)$$

という形となる. ここで $\chi_k(a)$ は $a^1, \cdots, a^r$ に関する k 次の斉次多項式である. ここで多項式 $\chi_{r-n}(a)$ は恒等的には 0 でない. $[S_a]$ は p_a という 1 次変換の固有値 0 に対する固有空間であり, 従ってその次元は $\chi(\lambda, p_a)$ の根 $\lambda = 0$ の重複度に等しい (C)参照). この重複度が $a = c$ に対しては n であるというのは

$$\chi_{r-n}(c) \neq 0 \qquad (9)$$

というのと同じである. いま, c がこの条件をみたすとしよう. このとき部分代数 $S = S_c$ が可換であることを証明する. R の部分空間 S の直交補空間を T とする. S は部分代数故すべての $s \in S$ に対し $p_s(S) \subseteq S$ であり, p_s が歪対称故 $p_s(T) \subseteq T$ でもある. かくして R はすべての $s \in S$ に対応する p_s で不変な二つの部分空間 S, T の直和である. S 上の 1 次変換 p_s を S, T 上の変換と考えたときそれぞれ p_s', p_s'' と記すことにする. R の基底で S と T の基底からなるものを考えて固有多項式 $\chi(\lambda, p_s)$ を計算すれば, 容易に判るように

$$\chi(\lambda, p_s) = \chi(\lambda, p_s')\chi(\lambda, p_s'') \qquad (10)$$

となる．いま，

$$\chi(\lambda, p_s') = \lambda^n \tag{11}$$

がすべての $s \in S$ に対し成立つことを示そう．そのため，$s^1, \cdots, s^n$ を S の一つの定まった基底に関する s の成分とすれば，容易に判るように $\chi(\lambda, p_s')$ は $\lambda, s^1, \cdots, s^n$ に関する n 次の斉次多項式である．また $\chi(\lambda, p_s'')$ は $\lambda, s^1, \cdots, s^n$ に関する $r-n$ 次の斉次多項式である．従って固有多項式 $\chi(\lambda, p_s'), \chi(\lambda, p_s'')$ [を λ の多項式と考えたとき] の係数は $s^1, \cdots, s^n$ の斉次多項式である．また R の部分空間 S は $p_c(x)=0$ なる $x \in R$ の全体である．従って $c \in S$ であり，かつ

$$\chi(\lambda, p_c') = \lambda^n \tag{12}$$

である．(9), (10), (12) から $\chi(\lambda, p_c'')$ は 0 を根に持たない．$\chi(\lambda, p_s'')$ の係数は s の連続函数故 c の十分近くの $b \in S$ に対してはやはり $\chi(\lambda, p_b'')$ は 0 を根に有しない．いま $\chi(\lambda, p_s')$ が少なくとも一つの $s \in S$ に対し 0 以外の根を有するとすれば，$\chi(\lambda, p_b')$ が 0 以外の根を有する如き b をいくらでも c に近くとることができる．これは $\chi(\lambda, p_s')$ の係数が $s^1, \cdots, s^n$ の多項式であることから判る．いま仮に (11) が成立たないとしよう．然らば $\chi(\lambda, p_b')$ が 0 以外の根を有し，$\chi(\lambda, p_b'')$ が 0 を根に持たないような $b \in S$ が存在する．そのとき $\chi(\lambda, p_b)$ は n より小なる箇数しか 0 を根として有しないことになり不合理である ((8) 参照)．従って (11) が成立つ．これから s, s' を S の任意の元とするとき $[s, s'] = p_s'(s') = 0$ が成立つ (C) 参照)．[$\chi(\lambda, p_s') = \lambda^n$ から p_s' の固有値はすべて 0 で一方それは歪対称故 $p_s' = 0$ である．]

これで定理 104 は証明された．

定義 51. R をコンパクト準単純リー代数，S をその正則部分代数 (定理 104 参照) とする．いま Q を $s \in S$ なる s に対する p_s の全体とする．Q は R を R の中へ写す歪対称な 1 次変換の作る可換な線型リー代数である (定理 104 参照)．リー代数 Q の固有 1 次形式の内には 0 が必ず存在する．この 0 に対応する固有空間が $[S]$ である．いま，$\varphi_0 = 0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$ がリー代数 Q の固有 1 次形式の全体とする．固有 1 次形式 φ_j にはある $\alpha_j \in S$ が対応して

$$\varphi_j(p_s) = i(\alpha_j, s) \tag{13}$$

とおける．固有1次形式 φ_j に対応する固有空間 R_{φ_j} を R_{α_j} と書く．$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ の全体を Δ, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ の全体を Σ とする．$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ を R の**ルート・ベクトル**，その全体 Σ を**ルート系**，部分空間 $R_{\alpha_j}\ 1 \leqq j \leqq k$ を**固有空間**という．B)により任意のルート・ベクトル α に対し $-\alpha$ もルート・ベクトルで，

$$R_{-\alpha} = \bar{R}_\alpha \tag{14}$$

が成立つ．また $[R]$ は部分空間 $[S]$, $R_{\alpha_1}, \cdots, R_{\alpha_k}$ の直和である．(13)から

$$[s, x] = i(\alpha_j, s)x\ ;\ x \in R_{\alpha_j},\ s \in S \tag{15}$$

が成立つ．更に，$x \in R_{\alpha_\mu}$, $y \in R_{\alpha_\nu}$; $\mu, \nu = 0, 1, \cdots, k$, ならば

$$[x, y] \in R_{\alpha_\mu + \alpha_\nu} \tag{16}$$

である．但しここで $\alpha_\mu + \alpha_\nu \notin \Delta$ ならば $R_{\alpha_\mu+\alpha_\nu} = 0$ と解釈する．

(16)を証明しよう．

$$p_s([x, y]) = [p_s(x), y] + [x, p_s(y)] = i(\alpha_\mu, s)[x, y]$$
$$+ i(\alpha_\nu, s)[x, y] = (\varphi_\mu(p_s) + \varphi_\nu(p_s))[x, y].$$

故に $[x, y] \in R_{\varphi_\mu + \varphi_\nu}$ で(16)は証明された．

D)　$x \in R_\alpha$, $y \in R_{-\alpha}$, $\alpha \in \Sigma$ (定義 51 参照)ならば

$$[x, y] = i(x, y)\alpha. \tag{17}$$

(17)を証明しよう．§61 (6)式により任意の $s \in S$ に対して，$([x, y], s) + (y, [x, s]) = 0$ 故

$$([x, y], s) = (y, [s, x]) = i(\alpha, s)(x, y) = (i(x, y)\alpha, s)$$

((15)参照)．この式が任意の $s \in S$ に対して成立ち，(16)から $[x, y] \in S$ であるから，(17)式が成立つ．

定理 105.　R をコンパクト準単純リー代数とする．このとき(定義 51 の記号を使うと)次のことが成立つ．　a)　$\alpha \in \Sigma$ に対し複素ベクトル空間 R_α の次元は 1 である．　b)　$\alpha \in \Sigma$ に対して $j\alpha$ (j は整数)が Σ に属するのは $j = \pm 1$ のときで，またそのときに限る．　c)　$\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して l を $\beta - j\alpha$ ($j = 0, 1, 2, \cdots, l$) がすべて Δ に入るような最大の負でない整数とする．また m を $\beta + j\alpha$ ($j = 0, 1, \cdots, m$) がすべて Δ に入るような最大の負でない整数とする．このとき

$$l - m = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \tag{18}$$

が成立つ．更に，$(x, \bar{x}) = 1, x \in R_\alpha, y \in R_\beta$ ならば

$$[\bar{x}, [x, y]] = -\frac{m\,(l+1)}{2}(\alpha, \alpha) y \tag{19}$$

となる．d) $\alpha \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma$, に対して，$\alpha + \beta \in \Sigma$, となるとき，$x \in R_\alpha$, $y \in R_\beta$ でしかも $x \neq 0$, $y \neq 0$ ならば $[x, y] \neq 0$ である．

証明. a), b), c), d) の証明に進む前に，次のような準備をしよう．いま，

$$\lambda \in \Sigma,\ \alpha \in \Sigma,\ u \in R_\lambda,\ x \in R_\alpha,\ u \neq 0,\ (x, \bar{x}) = 1,\ [\bar{x}, u] = 0 \tag{20}$$

と仮定する．順次にベクトル

$$u_0 = u \in R_\lambda, u_1 = [x, u_0] \in R_{\lambda+\alpha}, \cdots, u_j = [x, u_{j-1}] \in R_{\lambda+j\alpha} \tag{21}$$

を定義すれば，

$$[\bar{x}, u_j] = \left(j(\lambda, \alpha) + \frac{j(j-1)}{2}(\alpha, \alpha) \right) u_{j-1} \tag{22}$$

が成立つことを証明しよう．(22) は帰納法により証明される．$j = 0$ に対しては (22) の右辺のベクトル u_{-1} の係数が 0 に等しく，左辺は仮定((20) 参照) により 0 に等しいという意味で成立つ．次に (22) が $j = t$ に対して証明されたと仮定して $j = t+1$ のときにも成立つことを示そう．

$$[\bar{x}, u_{t+1}] = [\bar{x}, [x, u_t]] = -[[x, \bar{x}], u_t] + [x, [\bar{x}, u_t]] \tag{23}$$

(§52 (15), (16) 参照) が成立つ．一方

$$-[[x, \bar{x}], u_t] = -i[\alpha, u_t] = ((\lambda, \alpha) + t(\alpha, \alpha)) u_t \tag{24}$$

((15), (17), (21) 参照) であり，また (20) と帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}[x, [\bar{x}, u_t]] &= \left(t(\lambda, \alpha) + \frac{t(t-1)}{2}(\alpha, \alpha) \right)[x, u_{t-1}] \\ &= \left(t(\lambda, \alpha) + \frac{t(t-1)}{2}(\alpha, \alpha) \right) u_t \end{aligned} \tag{25}$$

となる．(23), (24), (25) から (22) が $j = t+1$ のとき成立つことが結論される．従って (22) が証明された．ベクトル u_j は $R_{\lambda+j\alpha}$ に属し，部分空間 $R_\gamma, \gamma \in \Delta$, の数は有限箇故，ある整数 $g \geqq 0$ に対してベクトル u_g は $\neq 0$ で，ベクトル u_{g+1} は $= 0$ となる．(22) で $j = g+1$ としてみると

$$g = -\frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \tag{26}$$

が得られる．$g \geqq 0$ であるから

$$(\lambda, \alpha) \leqq 0 \tag{27}$$

である．

さて，定理の a) を証明しよう．いま部分空間 $R_\alpha (\alpha \in \Sigma)$ の次元が 1 より大であったと仮定しよう．いま u を R_α の 0 と異なる任意の元とする．$R_{-\alpha} = \bar{R}_\alpha$ 故 $R_{-\alpha}$ の次元も 1 より大である．従って $R_{-\alpha}$ にはベクトル $\bar{x} \neq 0$ で $(\bar{x}, u) = 0$ なる条件をみたすものが存在する．(17) によりこのとき $[\bar{x}, u] = 0$ である．いま $x \neq 0$ に適当な実数を乗ずることにより $(x, \bar{x}) = 1$ としておく．$\lambda = \alpha$ として x, u は (20) のすべての条件をみたす．従って，不等式 (27) が成立つから，ここで $\lambda = \alpha$ とおけば $(\alpha, \alpha) \leqq 0$ となり不合理である．このようにして我々は矛盾に到達したから，$R_\alpha [\neq 0] (\alpha \in \Sigma)$ の次元が 1 であることが証明された．

定理の b) を証明する．いま t を $-j\alpha \in \Sigma$ となる整数 j の中で最大のものとする．$-\alpha \in \Sigma$ 故 $t \geqq 1$ である．$t = 1$ であることを証明しよう．いま $\lambda = -t\alpha$ とし u を R_λ の 0 でない元とする．そして x を R_α の元で $(x, \bar{x}) = 1$ をみたすものとする．$[\bar{x}, u] \in R_{-(t+1)\alpha}$ ((16) 参照) で，ベクトル $-(t+1)\alpha$ は Σ にもまた Δ にも含まれないから $[\bar{x}, u] = 0$ でなければならぬ．従って (20) の条件がこの x, u に対して皆みたされている．(26) で $\lambda = -t\alpha$ とおけば $g = 2t$ を得るから $u_0, u_1, \cdots, u_{2t}$ なるベクトルは皆 0 でない．このときベクトル u_{t+1} は R_α に属する ((21) 参照)．所が R_α は 1 次元故ベクトル u_{t+1} は x に比例する．従って $u_{t+2} = [x, u_{t+1}] = 0$ である．従って $2t < t + 2$ だから，$t < 2$, 即ち $t = 1$ である．

定理の c) を証明する．いま $\lambda = \beta - l\alpha$ とおく．u を R_λ の 0 でない元とし，x を R_α の元で $(x, \bar{x}) = 1$ なるものとする．そのとき ((17) 参照)．$[x, \bar{x}] = i\alpha$ である．$[\bar{x}, u] \in R_{\beta-(l+1)\alpha}$ で $\beta - (l+1)\alpha$ は Δ に含まれないから (20) の条件がすべて満たされる．従って $u_0, u_1, \cdots, u_g$ は皆 0 でなく $u_{g+1} = 0$ である．ここで整数 g は条件 (26) から定められる．いま

$$R_\lambda = R_{\beta-l\alpha}, R_{\lambda+\alpha}, \cdots, R_{\lambda+(l+m)\alpha} = R_{\beta+m\alpha}$$

なる部分空間から張られる部分空間を T とする．$p_{\bar{x}}(R_{\lambda+j\alpha}) \subset R_{\lambda+(j-1)\alpha}$ でかつ $p_{\bar{x}}(R_{\beta-l\alpha}) = 0$ 故部分空間 T は $p_{\bar{x}}$ で不変である．同様に $p_x(R_{\lambda+j\alpha}) \subset R_{\lambda+(j+1)\alpha}$

でかつ $p_x(R_{\beta+m\alpha})=0$ 故 T は p_x によっても不変である．§54, F) により

$$p_{i\alpha}=p_{[x,\bar{x}]}=p_x p_{\bar{x}}-p_{\bar{x}}p_x \tag{28}$$

である．従って

$$\mathrm{Sp}(p_{i\alpha})=\mathrm{Sp}(p_x p_{\bar{x}})-\mathrm{Sp}(p_{\bar{x}}p_x)=0 \tag{29}$$

(§61, (2) 参照) である．但しここでシュプールは T の上での1次変換と考えたときのものである．$R_{\lambda+j\alpha}$ は $p_{i\alpha}$ で不変であり，$R_{\lambda+j\alpha}$ の任意の元に対し $p_{i\alpha}(z)=-((\lambda,\alpha)+j(\alpha,\alpha))z$, ((15)参照) であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(p_{i\alpha})&=-\sum_{j=0}^{l+m}((\lambda,\alpha)+j(\alpha,\alpha))\\&=-(l+m+1)(\lambda,\alpha)-\frac{(l+m)(l+m+1)}{2}(\alpha,\alpha)\end{aligned} \tag{30}$$

が得られる．$\lambda+j\alpha\neq 0$ に対しては $R_{\lambda+j\alpha}$ の次元は1であり，$\lambda+j\alpha=0$ なるときは $(\lambda,\alpha)+j(\alpha,\alpha)=0$ であることをここで用いた．

(29) と (30) から

$$l+m=-\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \tag{31}$$

が得られる．$g=l+m$ ((26) 参照) で $u_0, u_1, \cdots, u_{l+m}$ なるベクトルはすべて0と異なる．(31) で λ にその値 $\beta-l\alpha$ を代入すれば (18) を得る．

次に (19) を証明しよう．R_β は1次元故，そこから u_l をとって u_l について証明すればよい．このとき (22) によって

$$[\bar{x},[x,u_l]]=[\bar{x},u_{l+1}]=\left((l+1)(\lambda,\alpha)+\frac{l(l+1)}{2}(\alpha,\alpha)\right)u_l$$

を得る．この式で λ をその値 $\beta-l\alpha$ で置換えると

$$[\bar{x},[x,u_l]]=\left((l+1)(\alpha,\beta)-\frac{l(l+1)}{2}(\alpha,\alpha)\right)u_l$$

となる．最後にこの式で (α,β) を $\frac{1}{2}(l-m)(\alpha,\alpha)$ ((18)参照) で置換えると

$$[\bar{x},[x,u_l]]=-\frac{m(l+1)}{2}(\alpha,\alpha)u_l$$

を得，従って (19) が証明された．

最後に d) を証明する．(19) 式から $\alpha+\beta\in\Sigma$ なるときは $[x,y]\neq 0$ が出る．

何となれば定義から $l\geqq 0$ であり，かつ($\alpha+\beta\in\Sigma$ 故)$m\geqq 1$ である．従って，$\dfrac{m(l+1)}{2}$ は0でないから．

かくして定理105が証明された．

例 105. R を3次元 Euclid ベクトル空間とし，R に二つのベクトル a, b の交換子積 $[a, b]$ として a, b のベクトル積をとれば，R は非可換な単純リー代数である．いま，その正則部分代数とルート系を構成してみよう．R の0でない任意の元 a に対し a と可換な R のベクトルの全体 S_a はもちろん a と平行なベクトルから成立っている．従って R の0でない元がすべて正則であり，このリー代数の階数は1である．ベクトル空間 R の右手系直交座標系 e, f, g をとると，その間の交換関係は次の通りである．

$$[e, f]=g,\quad [f, g]=e,\quad [g, e]=f.$$

いま $S=S_e$ とすると

$$[e, f+ig]=-i(f+ig), \tag{32}$$

$$[e, f-ig]=i(f-ig) \tag{33}$$

が成立つ．かくして得られたリー代数 R の基本2次形式が基底 e, f, g に対する成分で書けば $(x, x)=2(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)$ になることに注意する（例104参照）と，(32), (33) から R のルート・ベクトルは $\alpha=-\dfrac{1}{2}e$ 及び $-\alpha=+\dfrac{1}{2}e$ の二つで，その固有ベクトル $r_\alpha, r_{-\alpha}$ はそれぞれ

$$r_\alpha=f+ig,\quad r_{-\alpha}=f-ig$$

であることが結論される．

§63. ルート系からのコンパクト準単純リー代数の構成

R, R' を二つの Euclid ベクトル空間とし，A, A' をそれらの部分集合とする．A を A' の上に写す写像 f は

$$(f(x), f(y))=k^2(x, y)\ ;\ x\in A,\ y\in A$$

なるとき，**相似変換**といわれる．但しここで k は正数でベクトル x, y に無関係なものである．kを**相似比**という．特に $k=1$ なるとき f を**合同変換**という．R, R' の部分集合 A, A' は一方を他の上に写す相似または合同変換が存在するとき

それぞれ**相似**または**合同**であるという．

コンパクト準単純リー代数のルート系は Euclid ベクトル空間 S の部分集合であることに注意すると，この§の結果は次のように言い表わすことができる．

二つのコンパクト準単純リー代数のルート系が合同ならば，この二つのリー代数は同型である．更に二つのルート系が相似ならば実は合同であることが示される．従って二つのコンパクト準単純リー代数が同型となるためには，それらのリー代数のルート系(の一つ)が相似なることが十分条件となる．この§の終ではリー代数が単純となるための条件がそのルート系の計量的な性質を使って与えられる．

この§ではコンパクト準単純リー代数のみを扱うから，以下一々それを断らない．

A)　$\Sigma \subset S$ を R のルート系とする(定義51参照)．任意のベクトル $s \in S$ に対し内積即ち基本2次形式 (s, s) は

$$(s, s) = \sum_j (\alpha_j, s)^2 \tag{1}$$

で与えられることを示そう．ここで和 $\sum_j$ はルート系 Σ のすべての元 α_j の上に亘るものである．(1)により S はルート・ベクトルにより張られることが判る．

(1)を証明するためにベクトル空間 $[R]$ が $p_s (s \in S)$ で不変な部分空間 R_0, $R_{\alpha 1}, \cdots, R_{\alpha k}$ の直和となり，かつ $R_{\alpha j}$, $j = 1, \cdots, k$, の次元が1に等しい(定理105参照)ことを注意しておこう．更に $x \in R_0$ に対し $p_s(p_s(x)) = 0$ が成立ち $x \in R_{\alpha j}$ に対しては $p_s(p_s(x)) = -(\alpha_j, s)^2 x$ が成立つ．§61の(3)式によれば

$$(s, s) = -\mathrm{Sp}(p_s p_s) = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j, s)^2$$

となり，(1)が証明されたことになる．

次にベクトル空間 S が Σ に属するベクトルにより張られることを示そう．そのために S のベクトル s が Σ の元のどれとも直交するとしよう．そのとき(1)から

$$(s, s) = \sum (\alpha_j, s)^2 = 0$$

となり，従って $s = 0$ でなければならない．

B) いま，Σ' を Euclid ベクトル空間のベクトルの集まりで，あるルート系 Σ と相似なるものとする．換言すれば集合 $k\Sigma'$，即ち $k\alpha', \alpha' \in \Sigma'$ なるベクトルの集まりはあるルート系 Σ と合同とする．このとき相似比 k は Σ' により一意的に定められる．[即ち Σ のとり方に関係しない．] 従って相似な二つのルート系は合同である．[相似比は自分自身との相似から1でなければならぬからである．]

これを証明するために Σ' のある定まったベクトル β' を一つ選び，ベクトルの集合 $k\Sigma'$ と元 $s = k\beta'$ に対して(1)式を適用すれば

$$(\beta', \beta') = k^2 \sum_{\alpha' \in \Sigma'} (\alpha', \beta')^2 \tag{2}$$

を得る．これから正数 k は一意に定められる．

次にリー代数 R はそのルート系の計量的性質により同型を除き定まることの証明に進もう．

C) Σ をリー代数 R のルート系とする．部分空間 $R_\alpha (\alpha \in \Sigma)$ は1次元(定理105参照)部分空間故，R_α に属する0でない任意の元 r_α をとれば，それが基底となる．$R_{-\alpha} = \bar{R}_\alpha$ であるから，すべての $\alpha \in \Sigma$ に対し，部分空間 R_α の基底ベクトル r_α を

$$r_{-\alpha} = \bar{r}_\alpha;\ (r_\alpha, r_{-\alpha}) = 1 \tag{3}$$

なる条件をみたすように選ぶことができる．いま，$\alpha \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma$ に対し $\alpha + \beta \in \Sigma$ ならば

$$[r_\alpha, r_\beta] = N_{\alpha\beta} r_{\alpha+\beta} \tag{4}$$

となり，ここで $N_{\alpha\beta}$ は0でない(定理105, d)参照)．三つのベクトル $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ の少なくとも一つが Σ に属さないとき

$$N_{\alpha\beta} = 0 \tag{5}$$

と考えることにする．もちろん任意の α, β に対し

$$N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta} \tag{6}$$

と

$$N_{-\alpha, -\beta} = \bar{N}_{\alpha\beta} \tag{7}$$

とが成立つ．いま α, β, γ を Σ の三つのベクトルとし，それが3角形を作る，

即ち

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

をみたすとする．このとき

$$N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha} \tag{8}$$

であることを示そう．

更に，α, β, γ, δ が Σ に属する四つのベクトルで４角形を作るとき，即ち

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

をみたすとき，更にこの四つの中の任意の二つが互に逆向きでない［即ち $\alpha=-\beta$ というようなことがない］とすれば，

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta}+N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}=0 \tag{9}$$

が成立つ．

（８）を証明しよう．§61,（６）式により

$$([r_\alpha, r_\beta], r_\gamma)+(r_\beta, [r_\alpha, r_\gamma])=0$$

また

$$([r_\alpha, r_\beta], r_\gamma)=N_{\alpha\beta}(r_{\alpha+\beta}, r_\gamma)=N_{\alpha\beta}(r_{-\gamma}, r_\gamma)=N_{\alpha\beta}$$

が成立つ((４),（３)参照)．全く同様にして

$$(r_\beta, [r_\alpha, r_\gamma])=N_{\alpha\gamma}(r_\beta, r_{\alpha+\gamma})=N_{\alpha\gamma}(r_\beta, r_{-\beta})=N_{\alpha\gamma}=-N_{\gamma\alpha}$$

が成立つ((４),（３),（６)参照)．従って $N_{\alpha\beta}-N_{\gamma\alpha}=0$ が得られる．ベクトル α, β, γ に対し仮定が対称だから（８）が証明されたことになる．

次に（９）を証明しよう．§52, (16) により

$$[r_\alpha, [r_\beta, r_\gamma]]+[r_\beta, [r_\gamma, r_\alpha]]+[r_\gamma, [r_\alpha, r_\beta]]=0 \tag{10}$$

が成立つ．更にもしも $\beta+\gamma\in\Sigma$ ならば，$\alpha, \beta+\gamma, \delta$ は Σ に属する三つのベクトルで３角形を作るから

$$[r_\alpha, [r_\beta, r_\gamma]]=N_{\beta\gamma}[r_\alpha, r_{\beta+\gamma}]=N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\,\beta+\gamma}r_{\alpha+\beta+\gamma}=N_{\beta\gamma}N_{\delta\alpha}r_{-\delta}$$

となる((８)参照)．$\beta+\gamma\notin\Sigma$ なるときは，$[r_\alpha, [r_\beta, r_\gamma]]=0$ であり，同時に $N_{\beta\gamma}=0$ 故，どちらにしても

$$[r_\alpha, [r_\beta, r_\gamma]]=-N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}r_{-\delta} \tag{11}$$

が成立つ．全く同様にして次の二つの式が成立つ．

$$[r_\beta, [r_\gamma, r_\alpha]] = -N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta}r_{-\delta}\,;\ [r_\gamma, [r_\alpha, r_\beta]] = -N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}r_{-\delta}. \tag{12}$$

(10), (11), (12)から(9)が導かれる.

D)　Σをリー代数Rのルート系とする．Σの二つの元α, βに対して，定理105, c)においてしたように整数l, mが定まる．このとき

$$|N_{\alpha\beta}|^2 = \frac{m(l+1)}{2}(\alpha, \alpha) \tag{13}$$

である(C)参照).

(13)を証明しよう．$\alpha+\beta$がΣに属さなければ$N_{\alpha\beta}=0$でかつ$m=0$であるから(13)は成立つ．次に$\alpha+\beta\in\Sigma$と仮定しよう．この場合に(13)を証明するために§62の(19)式を使う．§62(19)で$\bar{x}=r_{-\alpha}, x=r_\alpha, y=r_\beta$とすれば

$$[r_{-\alpha}, [r_\alpha, r_\beta]] = -\frac{m(l+1)}{2}(\alpha, \alpha)r_\beta \tag{14}$$

を得る．更にベクトル$-\alpha, \alpha+\beta, -\beta$は3角形を作るから(C)参照)次の式が成立つ.

$$[r_{-\alpha}, [r_\alpha, r_\beta]] = N_{\alpha\beta}[r_{-\alpha}, r_{\alpha+\beta}] = N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\,\alpha+\beta}r_\beta = -N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\,-\beta}r_\beta. \tag{15}$$

(15), (14), (7)から(13)式が出る.

E)　$\Sigma\subset S$をリー代数Rのルート系とする．$[R]$の任意の元xは一意的に

$$x = s + \sum_\alpha \tau^\alpha r_\alpha \tag{16}$$

と書表わせる．但しここで$s\in[S]$で$\tau^\alpha(\alpha\in\Sigma)$は複素数である(C)参照)．$x$が実ベクトルである，即ち$R$に属するための必要かつ十分な条件は$\bar{x}=x$であるから

$$s\in S\,;\ \tau^{-\alpha} = \bar{\tau}^\alpha,\ \alpha\in\Sigma \tag{17}$$

といってもよい.

部分代数Sは可換であるから$[R]$の交換子は次の関係式によりすっかり定まる.

$$[s, r_\alpha] = i(\alpha, s)r_\alpha, \tag{18}$$

$$[r_\alpha, r_{-\alpha}] = i\alpha, \tag{19}$$

$$[r_\alpha, r_\beta] = N_{\alpha\beta}r_{\alpha+\beta},\quad \alpha+\beta\neq0 \tag{20}$$

(§62, (15), (17), §63, (4)参照).

リー代数を調べるために次に正則部分代数 S のベクトルの間に順序を導入しよう.

F) A を実ベクトル空間とする. A の基底を一つ選ぶと A のベクトルの間に順序を入れることができる. $e_1, \cdots, e_m$ を A の基底とし $a = a^1e_1 + \cdots + a^me_m$, $a \neq 0$ とする. $a^1, \cdots, a^m$ の中で, 左の方から見て行くとき最初に現われる 0 でない数が正なるときベクトル a は**正**であるといい, $a > 0$ と書く. いま a, b が A の二つの異なるベクトルとするとき, $a - b > 0$ ならば $a > b$ (または $b < a$) と書く. このようにすると A の任意の二つの相異なる 2 元 a, b に対して, $a > b$, $a < b$ のどちらか一方が必ず成立つ. このような不等式については[通常の数の不等式と同様に]辺々相加え, または正数を乗ずることによりまた同じ向きの不等式が得られる. 正則部分代数 S がベクトル空間 A に一致するか, それに含まれるときはルート系 Σ のすべての元の間にも順序が定義されている. これによって非常に重要な単純ルート・ベクトルなる概念が生ずる. ルート・ベクトル α はそれが正で, かつ二つの正のルート・ベクトルの和として書表わされないとき**単純**であるという. ルート・ベクトルが単純であるという概念は基底[により定まる順序]に関係し, 一つの基底(と順序)で単純なベクトルでも, 他の基底を選べば, 単純でなくなることがあり得るのを忘れてはならない.

次にリー代数の分類の基礎となる定理 106 の formulation と証明に移ろう. この定理はリー代数 R がそのルート系の計量的性質により完全に定まることを保証するものである.

命題 E)によれば, リー代数 R はベクトル空間 S とその上のルート系 Σ 及び複素数 $N_{\alpha\beta}$ を与えることにより一意的に定まる. 命題 D) によれば, 複素数 $N_{\alpha\beta}$ の絶対値はルート系の計量的性質により定まる.

定理 106 の証明は基礎ベクトル $r_\alpha (\alpha \in \Sigma)$ の選び方の任意性を使ってすべての $N_{\alpha\beta}$ が実数となるような r_α の選び方があることを示し, 次にこの $N_{\alpha\beta}$ の符号を定める法則を確立する. この符号のきめ方はルート系の計量的性質のみで一意に定まるのではなく, その構成にはある任意性がある(F) 参照). しかし,

二つの合同なルート系 Σ と Σ' では全く同様に符号を定めることができる.

定理 106. リー代数 R, R' のルート系 Σ, Σ' が合同ならば, R と R' は同型である. 更に詳しく言えば, Σ を Σ' の上に写す合同変換 f はリー代数 R の R' の上への同型写像に拡張できる. この定理の証明の中で基底 $r_\alpha, \alpha\in\Sigma$, はすべての $N_{\alpha,\beta}$ が実数となるように選べることが判る(C)参照).

証明. S の基底 $e_1, \cdots, e_n$ を定めることにより S の元の間に順序を付けて置く(F)参照). いま, ρ を Σ の単純でない正の元とする. $\lambda<\mu$ でしかも $\lambda+\mu=\rho$ をみたす Σ の正の二元の対 λ, μ の全体を考え, その中で上に入れた S の順序で最小となる λ を α とし, $\alpha+\beta=\rho$ なる β をとる. そして $N_\rho=N_{\alpha,\beta}$ とおく. かくして単純でない任意の正のベクトル $\rho\in\Sigma$ に対して一意的に複素数 N_ρ が対応する. いま λ, μ が α, β と異なる Σ の正の元の対で $\lambda+\mu=\alpha+\beta=\rho$, $(\lambda<\mu)$ をみたすものとする(定理 105, b)参照). 然らば

$$\alpha<\lambda<\mu<\beta \tag{21}$$

でなければならない. そして四つのベクトル $\alpha, \beta, -\lambda, -\mu$ は 4 角形を作る(C)参照). 従って(9)により

$$N_{\alpha\beta}N_{-\lambda,-\mu}+N_{\alpha,-\lambda}N_{-\mu,\beta}+N_{\alpha,-\mu}N_{\beta,-\lambda}=0$$

が成立ち, 従ってまた N_ρ の定義と(7)により

$$N_{\lambda,\mu}=\frac{\bar{N}_{\alpha,-\lambda}\bar{N}_{\beta,-\mu}-\bar{N}_{\alpha,-\mu}\bar{N}_{\beta,-\lambda}}{\bar{N}_{\lambda+\mu}}$$

を得る.

$\lambda-\alpha\in\Sigma$ なる場合は $\alpha, -\lambda, \lambda-\alpha$ は 3 角形を作る Σ のベクトルであるから(8)により

$$\bar{N}_{\alpha,-\lambda}=\bar{N}_{\lambda-\alpha,\alpha} \tag{22}$$

が得られる. $\lambda-\alpha\notin\Sigma$ なる場合は(22)の両辺は 0 に等しい. 従って(22)はどちらの場合でも成立つ. 全く同様にして次の 3 式が得られる.

$$\bar{N}_{\beta,-\mu}=N_{\mu,\beta-\mu}, \qquad \bar{N}_{\alpha,-\mu}=\bar{N}_{\mu-\alpha,\alpha}, \qquad \bar{N}_{\beta,-\lambda}=N_{\lambda,\beta-\lambda}.$$

結局

$$N_{\lambda,\mu}=\frac{\bar{N}_{\lambda-\alpha,\alpha}N_{\mu,\beta-\mu}-\bar{N}_{\mu-\alpha,\alpha}N_{\lambda,\beta-\lambda}}{\bar{N}_{\lambda+\mu}} \tag{23}$$

となる．従って $N_{\lambda,\mu}$ が $N_{\lambda+\mu}$ と $\gamma+\delta<\lambda+\mu$ をみたす Σ の正の元 γ,δ に対する $N_{\gamma,\delta}$ により表わされることになった．故に (23) 式によりかかる $N_{\gamma,\delta}$, $N_{\lambda+\mu}$ がすべて実数ならば $N_{\lambda,\mu}$ もまた実数となる．(23) 中に出て来る $N_{\gamma,\delta}$ という数はまたそれ自身が $N_{\gamma+\delta}$ と $N_{\varepsilon,\zeta}$,（但し ε,ζ は Σ の正の元で $\varepsilon+\zeta<\gamma+\delta$ なるもの）で表わされる．かくしてすべての $N_{\lambda,\mu}$, $\lambda>0$, $\mu>0$, は N_ρ, $\rho\in\Sigma$, $0<\rho\leqq\lambda+\mu$, で表わされる．従ってすべての N_ρ が実数ならば，すべての $N_{\lambda,\mu}$ が実数である．

今迄は $\lambda,\mu>0$ であったが，次に λ, μ, ν を Σ に属し，3角形を作る任意の三つのベクトルとする．この場合この三つは同時に正または同時に負ということはない．従ってこの三つのベクトルの中二つが正で一つが負であるか，二つが負で一つが正であるかの二つの場合のみが起り得る．このことと(7)，(8)，(23)からすべての $N_{\lambda,\mu}$ が N_ρ により表わされることと，従って，明らかにすべての N_ρ が実数ならば $N_{\lambda,\mu}$ はまた実数であることが知られる．

次に基底 r_α, $\alpha\in\Sigma$, をすべての N_ρ が正の実数となるように選べることを証明しよう．$r_{-\alpha}=\bar{r}_\alpha$ なる関係をみたすようにとるのだから，正の α についてのみ証明すればよい．ρ を Σ に属する正のベクトルとする．いま，$0<\alpha<\rho$ をみたす任意の $\alpha\in\Sigma$ に対し r_α を $0<\alpha<\rho$ なるすべての α について N_α が正の実数となるように選べたとしよう．ρ がもしも単純なら，$(r_\rho, \bar{r}_\rho)=1$ なる R_ρ の任意のベクトルを r_ρ とすればよい．ρ が単純ベクトルでなければ $\rho=\alpha+\beta$ と ρ を Σ に属する二つの正のベクトルの和に書ける．いま α,β をかかるベクトルの組の中で α が最小になるようにとっておく．このときベクトル r_ρ を $(r_\rho, \overline{r_\rho})=1$ をみたし，かつ

$$[r_\alpha, r_\beta]=N_{\alpha\beta}r_\rho$$

において $N_{\alpha\beta}=N_\rho$ が正の実数となるように選ぶ．このように帰納的に r_α, $\alpha\in\Sigma$, を構成して行けば，すべての N_ρ が正の実数となる．ここで(13)式により $N_\rho=N_{\alpha+\beta}$ はルート系 Σ の計量的性質により一意に定まっていることを注意して置く．

次にリー代数 R' の正則部分代数を S'，そのルート系を $\Sigma'\subset S'$ とする．Σ か

ら Σ' の上への合同変換 f は Euclid ベクトル空間 S から S' の上への合同変換に拡張される．S の基底 $e_j(1\leqq j\leqq n)$ に対し $f(e_j)\,(1\leqq i\leqq n)$ を S' の基底にとり，この基底に関し S で基底 e_j により定義したのと同様の方法で S' のベクトルの間に順序を導入する．明らかに S の二つのベクトル a, b が $a<b$ なる順序関係を有すれば $f(a)<f(b)$ である．このようにして得られた Σ' の順序を使って，Σ の順序で $r_\alpha, \alpha\in\Sigma,$ を定めたと全く同様にして基底ベクトル $r'_{\alpha'}, \alpha'\in\Sigma'$ を定める．いまベクトル r_α に $f(r_\alpha)=r'_{f(\alpha)}$ を対応させる．このときは基底ベクトルの選び方から明らかなように

$$N'_{f(\alpha),\,f(\beta)}=N_{\alpha,\,\beta}$$

である．このようにして f は S の上で定義され，またすべての $r_\alpha,\ \alpha\in\Sigma,$ に対し定義されたから，(16)によって1次写像として $[R]$ 全体で一意的に定義される．(18), (19), (20) により f は複素リー代数 $[R]$ から $[R']$ の中への同型対応であり，(17)により $f(R)=R'$ である［従って f は R と R' の同型を与える］．

かくして定理106が証明された．

G)　リー代数 R が二つのイデアル R_1, R_2 の直和となったとする．§61 の C), E)から R_1, R_2 はまたコンパクト準単純リー代数である．いま $c_i\in R_i\ (i=1,2)$, $c=c_1+c_2$ とすれば，

$$S_c=S_{c_1}{}^{(1)}+S_{c_2}{}^{(2)} \tag{24}$$

が成立つ．ここで $S_{c_i}{}^{(i)}$ は元 c_i に対応する R_i の部分代数である［$S_{c_i}{}^{(i)}$ は c_i と可換な R_{c_i} の元の全体である］(定理104参照)．更にこのとき c が R の正則元なるためには各 $i=1,2$ に対し c_i が R_i の正則元となることが必要かつ十分である．

$$[x_1+x_2, y_1+y_2]=[x_1, y_1]+[x_2, y_2]\,;\ x_i\in R_i,\ y_i\in R_i,\ (i=1,2)$$

であるから(24)が成立つ．

後半の証明をするためにまず n, n_1, n_2 をそれぞれ R, R_1, R_2 の階数としよう．c を R の正則元とすれば，(24) から $n\geqq n_1+n_2$ が得られ，更に $n>n_1+n_2$ となるのは少なくとも一つの $c_i\in R_i(i=1,2)$ が正則でない場合に限られる．逆に $c_i\in R_i(i=1,2)$ が共に正則とすれば，(24) により $n\leqq n_1+n_2$ が得られ，$n<n_1$

$+n_2$ となるのは c が正則でない場合に限られる．従って命題 G) は証明された．

次の命題 H) でリー代数 R が**直和に分解する**ための条件を（ルート系の言葉で）与えよう．

H)　Euclid ベクトル空間内のベクトルの集合 Γ が**分解**するとは，Γ が共通部分を有しない空でない部分集合 Γ_1, Γ_2 の和集合となり，かつ Γ_1 に属するベクトルは Γ_2 に属する任意のベクトルと直交することをいう．リー代数 R のルート系 Σ がその部分集合 Σ_1, Σ_2 に分解するならば，R は Σ_1, Σ_2 をそのルート系とする部分代数 R_1, R_2 の直和となることが証明される．逆に R が部分代数 R_1, R_2 の直和になったとすれば，適当に R の正則部分代数 S を選べば，ルート系 $\Sigma \subset S$ はリー代数 R_1, R_2 のルート系 Σ_1, Σ_2 に分解する．

この命題 H) を証明しよう．リー代数 R のルート系 Σ がその部分集合 Σ_1, Σ_2 に分解したと仮定しよう．このとき，Σ_1, Σ_2 で張られる部分空間を S_1, S_2 とすれば，$S = S_1 + S_2$ が成立つ（A) 参照）．任意のルート・ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ に対して固有ベクトル r_λ を $r_{-\lambda} = \bar{r}_\lambda$ となるように選んでおく．このとき R の任意の元 a は一意的に次の形に書表わされる．

$$a = b_1 + b_2 + \sum_{\lambda \in \Sigma_1} \tau^\lambda r_\lambda + \sum_{\lambda \in \Sigma_2} \tau^\lambda r_\lambda\,;\ \tau^{-\lambda} = \bar{\tau}^\lambda,\ b_1 \in S_1,\ b_2 \in S_2.$$

このとき

$$a_1 = b_1 + \sum_{\lambda \in \Sigma_1} \tau^\lambda r_\lambda,\ \ a_2 = b_2 + \sum_{\lambda \in \Sigma_2} \tau^\lambda r_\lambda$$

とおけば，$a = a_1 + a_2$ となり，ベクトル空間 R はその部分空間 R_1, R_2 の直和となる．但し R_i は $a_i (i = 1, 2)$ なる形のベクトルの全体より成る集合である．$\alpha_1 \in \Sigma_1$, $\alpha_2 \in \Sigma_2$ ならばベクトル $\alpha_1 + \alpha_2$ はもはや Σ に属しないことに注意しよう．実際ベクトル $\alpha_1 + \alpha_2$ はベクトル α_1, α_2 のどちらとも直交しない．従って Σ に属し得ない．このことから $[a_1, a_2] = 0$ が出る（§ 62, (15), (16) 参照）．従ってリー代数 R はその部分代数［実はイデアル］R_1, R_2 の直和となることが判った．G) によって S_i はリー代数 R_i の正則部分代数であり，定義 51 により Σ_i はリー代数 R_i のルート系である．

いま，逆にリー代数 R がその部分代数 R_1, R_2 の直和となったとする．$\Sigma_1 \subset S_1$,

$\Sigma_2 \subset S_2$ をリー代数 R_1, R_2 のルート系とする．このとき $S = S_1 + S_2$ は R の正則部分代数である（G）参照）．そして $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ は R のルート系である（定義51参照）．R はリー代数 R_1, R_2 の直和であるから（§61, C）参照）容易に判るように $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_2$, $y_1 \in R_1$, $y_2 \in R_2$ に対しては $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ となる．従って Σ_1 に属する任意のベクトルは Σ_2 に属する任意のベクトルと直交する．

これで命題 H）は証明された．

§64. ルート系の不変性

コンパクト準単純リー代数のルート系はその正則部分代数を一つ選ぶことにより定まるものである（定義51参照）．前の§ではルート系の計量的性質からリー代数 R が一意的に定められることを証明した．リー代数 R には二つの合同でないルート系が含まれ得ないことを示すのが残された問題である．この§ではこれを証明する．これによって，コンパクト準単純リー代数の分類はそのルート系の分類と同値になる．リー代数 R の任意の二つのルート系が合同となることは，R の任意の二つの正則部分代数が R のある自己同型写像 g により互に移り得ることから導かれる．この定理は局所的ではなく，自己同型 g は単位元に近いとは限らない．自己同型写像 g を構成するためにリー代数 R のすべての自己同型写像の作る群の単位元成分 G を我々の考察に導入する．リー代数 R は自然な対応で群 G のリー代数 P と同型となる（定理102参照）から，正則部分代数 S には G の部分群 H が対応する．G の任意の元は G の内部自己同型により H の中の元に変換されることが示される（定理107参照．定理109はそれから容易に導かれる）．この定理と同様な方法で G の普遍被覆群がコンパクトであるというWeyl〔45〕の重要な定理が証明される．従って G と同型なリー代数を有する連結なコンパクト・リー群で互に同型でないものは高々有限箇しか存在しない．

A)　R を m 次元のコンパクト準単純リー代数とし，その階数を n とする．また P を R の随伴リー代数，G を R の自己同型群の単位元成分とする．既に

注意したように P は G のリー代数であり，$a \to p_a$ なる自然な定まった対応により R と P は同型である(定理 102 参照). 更に S を R の任意の一つの正則部分代数とし，Q を S に対応する P の部分代数，即ち $p_s, s \in S$ という形の R の1次変換の全体とする. このとき部分代数 Q に対しリー群 G の大域的な部分群 H が対応することが示される. 更に詳しく言うと，部分群 H は次のように定められる. いま $\varphi(t, a)$, $a \in R$ を群 G の接ベクトルが p_a となるような1径数部分群とする. いま

$$\varphi(a) = \varphi(1, a)$$

と置けば，φ はベクトル群 S から部分代数 Q に対応する G の閉部分群 $H = \varphi(S)$ の上への準同型写像である. また R の自己同型写像 $h_s = \varphi(s), s \in S$ は

$$h_s(b) = b, b \in S\,;\; h_s(r_\alpha) = e^{i(\alpha, s)} r_\alpha, \alpha \in \Sigma \tag{1}$$

なる形をしている.

これを証明しよう. 直ちに判るように(1)で定義される [[R] の] 1次変換 h_s は R をそれ自身の中へ移す. そして

$$h_{ts}(b) = b, \qquad h_{ts}(r_\alpha) = e^{it(\alpha, s)} r_\alpha \tag{2}$$

が成立つ. h_{ts} のこの形から，h_{ts} は R 上のすべての1次変換の作る群 [$GL(R)$] の t を径数とする1径数部分群芽である. (2)を $t = 0$ において微分すれば(定義 51 参照),

$$\frac{d}{dt} h_{ts} \bigg|_{t=0} = p_s, \tag{3}$$

即ち h_{ts} の接ベクトルは [derivaton] p_s であるから，実際に $h_s \in G$ である(§ 54, F)参照). φ が S 上では準同型写像であることは，S が可換なることと(1)とから判る. もし $\varphi(S) = H$ が閉集合でないならば $\bar{H}$ は G の部分群で H の次元 n より大きな次元を有することになるが，S が R の極大可換部分代数故かかることは不可能である.

後で証明する(定理 107 参照)ように，G の任意の元 f は次の形に書ける(A)参照).

$$f = ghg^{-1}, \quad g \in G, \quad h \in H. \tag{4}$$

部分群 H に属する R の自己同型は(1)のような形をしていることを注意すれば，R の任意の自己同型 $f\in G$ は $g\in G$ による変換により，かかる標準形に変換されることが判る．R の基底 s_i, r_α ; $i=1, \cdots, n, \alpha\in\Sigma$, に関する変換 h の行列は対角型である((1)参照)．(1)から判るように，変換 h 従って変換 f の，固有値の内で，n 箇は1で残りは絶対値1である．$f\in G$ はその固有値の中で丁度 n 箇だけが1に等しいとき**正則**であるという．

この§の全体は定理107の証明と，それからいくつかの結果を導くことを目標とする．そのために最初の主要な段階は次の補助定理である．

B) $a\in R, g\in G$ とし，U をベクトル空間 R における，0の半径[1)] $\rho>0$ の球近傍とする(A)参照)．このとき

$$g\varphi(a)g^{-1}=\varphi(g(a)), \tag{5}$$

$$g(U)=U \tag{6}$$

が成立つ．更に ρ を十分小にとれば，φ は近傍 U から G の単位元の近傍への同相写像となり，かつ

$$a\in U,\ b\in U,\ g\varphi(a)g^{-1}=\varphi(b) \tag{7}$$

ならば

$$b=g(a) \tag{8}$$

が成立ち，逆も真である．更に G の与えられた部分群 K に対し十分 ρ を小にとれば，K に対応する R の部分代数を T とするとき

$$\varphi(U)\frown K=\varphi(T\frown U) \tag{9}$$

が成立つ．

(5)を証明するために1径数部分群 $g\varphi(ta)g^{-1}$ の接ベクトルを計算すると，$t=0$ で微分して

$$\frac{d}{dt}\,g\varphi(ta)g^{-1}\bigg|_{t=0}=gp_ag^{-1}=p_{g(a)}$$

が得られる(§54, (15)参照)．従って $g\varphi(ta)g^{-1}=\varphi(tg(a))$ であり，$t=1$ として(5)を得る．φ が U 上で同相写像となりかつ与えられた部分群 K に対して

訳註 1) R の距離は R の基本2次形式により定義する．

(9)が成立つような十分小さい $\rho>0$ の存在することは第1種標準座標の性質(§42, B)及び定理62参照)から判る．φ が U 上の同相写像であることと，(7)から(8)が出ることを証明しよう．(7)から(5)によって $\varphi(g(a))=\varphi(b)$ が得られ，$g(a)\in U$ ((6)参照)で φ が U 上では1対1写像であるから，$g(a)=b$ が得られる．

補助定理

$$\psi(g, h)=ghg^{-1},\ g\in G,\ h\in H \tag{10}$$

により群 $G\times H$ から群 G の中への写像 ψ を定義する．写像 ψ は多様体 $G\times H$ から G の中への解析写像であり，G の次元を m とすれば ψ の函数行列の階数は m を越えない．ψ の函数行列の点 $(g, h)\in G\times H$ における階数が m に等しいのは，元 h が，従って同じことであるが，元 $f=ghg^{-1}=\psi(g, h)$ が正則なるとき，かつそのときに限る．更に G の非正則元 f で $f=\psi(g, h)$ の形に書けるものの全体の集合 $\mathfrak{S}$ はある解析写像による，次元 $m-3$ のコンパクトな解析的多様体の像となっている．

証明．まず第一に関係式 $f=ghg^{-1}$ は

$$fg=gh \tag{11}$$

の形に書直せる．いま (g_*, h_*) を群 $G\times H$ の定まった元とし

$$f_*g_*=g_*h_* \tag{12}$$

とする．点 (g_*, h_*) における写像 ψ の函数行列の階数を計算するために群 $G\times H$ の変換 $(g, h)\to(y, z)$ を

$$(g, h)=(g_*y, h_*z) \tag{13}$$

で定義し，群 G の変換 $f\to x$ を

$$f=f_*x \tag{14}$$

で定める．この二つの変換は共に滑らか[解析的]で，かつ逆も滑らか故，この変換により，f, g, h なる変数の代りに変数として x, y, z を導入する．この新しい変数に対しては，条件(11)は

$$f_*xg_*y=g_*yh_*z$$

なる形となり，従って

$$(f_*g_*)^{-1}f_*xg_*y = (g_*h_*)^{-1}g_*yh_*z$$

と同じことである((12)参照). 従って

$$g_*{}^{-1}xg_*y = h_*{}^{-1}yh_*z \tag{15}$$

が成立つ. この最後の式によって群 $G\times H$ から G の中への写像 ψ'; $(y, z)\to x$ は (e, e) を e へ写し, その (e, e) における函数行列の階数は写像 ψ の函数行列の (g_*, h_*) における階数に等しい.

そこで, 写像 ψ' の点 (e, e) における階数を計算しよう. 写像 ψ' を点 (e, e) において1次化すると, 群 $G\times H$ に点 (e, e) において接するベクトル空間 $P+Q$ から群 G に点 e で接するベクトル空間 P への1次変換 ψ^* が得られる. この1次変換 ψ^* を計算するために, $t=0$ のとき点 (e, e) を通る任意の[解析的な]曲線 $(y(t), z(t))$ で (e, e) における接ベクトルが (p_b, p_c), $b\in R$, $c\in S$, となるものを取り, 対応する曲線 $\psi'(y(t), z(t))=x(t)$ の接ベクトル p_a を見出だそう. (15)により曲線 $x(t)$ は

$$g_*{}^{-1}x(t)g_*y(t) = h_*{}^{-1}y(t)h_*z(t)$$

なる式によって定められる. この式を t について $t=0$ で微分すると

$$g_*{}^{-1}p_ag_* + p_b = h_*{}^{-1}p_bh_* + p_c$$

が得られる. [随伴表現は同型表現であるから] この式と§54の(15)式から

$$g_*{}^{-1}(a) + b = h_*{}^{-1}(b) + c,$$

換言すれば

$$a = g_*(h_*{}^{-1}(b) - b + c) \tag{16}$$

が得られる. g_* は R の自己同型写像で $u\to p_u$ はリー代数 R からリー代数 P の上への同型写像で, S を Q の上に写すから, リー代数 $P+Q$ から P の上への写像 ψ^* の代りにリー代数 $R+S$ から R の上への写像 ω を

$$\omega(b, c) = h_*{}^{-1}(b) - b + c;\ b\in R,\ c\in S \tag{17}$$

で定義できる. (1)式と(17)式からベクトル空間 $\omega(R+S)$ の次元が m より低くなるのは, 元 h_* が少なくとも一つの $\alpha\in\Sigma$ に対して

$$h_*(r_\alpha) = r_\alpha \tag{18}$$

をみたすとき, かつそのときに限る. 即ち h_* が正則でないとき, かつそのと

きに限る．従って補助定理の最初の部分は証明された．

$\alpha \in \Sigma$ を一つの定まったルート・ベクトルとする．H の元 h で

$$h(r_\alpha) = r_\alpha \tag{19}$$

なる条件をみたすものの全体 H_α は，群 H の部分群をなす．0 に十分近い $s \in S$ に対する $h = h_s$ が H_α に属するための必要かつ十分な条件は $(\alpha, s) = 0$ である((1)参照)．従って群 H_α の次元は $n-1$ である．群 G の元で H_α のすべての元と可換なるものの全体の集合を G_α とする．明らかに G_α は G の部分群である．群 G の部分群 G_α に対応するリー代数 R の部分代数を R_α とする．

B) から直ちに $a \in R$ が R_α に属するためには任意の $h \in H_\alpha$ に対し $h(a) = a$ となることが必要かつ十分であることが判る．この最後の式は明らかに

$$a = s + \tau r_\alpha + \bar{\tau} r_{-\alpha}, \quad s \in S \tag{20}$$

なる形の元に対してはみたされ，また上の式が成立つのはこの形の元に限る．従って群 G_α は $n+2$ 次元で G_α による左剰余類の作る空間 G/G_α の次元は $m-(n+2)$ に等しい．いま g_1, g_2 が同一の左剰余類 $\hat{g} \in G/G_\alpha$ に含まれる G の 2 元とし，$h \in H_\alpha$ とすれば，明らかに $g_1 h g_1^{-1} = g_2 h g_2^{-1}$ であるから

$$\psi(\hat{g}, h) = \psi(g_1, h)\ ;\ g_1 \in \hat{g},\ \ h \in H_\alpha$$

と定義することができる．かくして変換 ψ は直積 $(G/G_\alpha) \times H_\alpha$ なる $m-(n+2)+n-1 = m-3$ 次元の空間の上で定義されたことになる．任意の非正則元 $h \in H$ に対しルート・ベクトル α が存在して，$h \in H_\alpha$ となるから，補助定理の中で定義されている多様体 $\mathfrak{S}$ は $m-3$ 次元の多様体 $(G/G_\alpha) \times H_\alpha, \alpha \in \Sigma$，のすべてから成る多様体の解析写像 ψ による像となっている．

従って補助定理は証明された．

次の命題 C), D), E) は定理 107 の証明に用いられる微分可能多様体の基本的な性質である(§45 参照)．

C)　ψ が l 次元多様体 L から m 次元多様体 M への滑らかな写像とし，$l<m$ とする．F が L のコンパクトな部分多様体ならば，$\psi(F)$ は M で疎な集合，即ち閉苞が内点を含まない集合を作る．

C) を証明しよう．$a \in F, b = \psi(a)$ に対し，V_b を M の点 b の任意の座標近傍

とし U_a を $\psi(U_a)\subset V_b$ となるような L における点 a の座標近傍とする. L における点 a の近傍 U_{a1}, U_{a2} を $\bar{U}_{a1}\subset U_a, \bar{U}_{a2}\subset U_{a1}$ であり, かつ $\bar{U}_{a1}$ がコンパクトとなるように選ぶ. $U_{a2}, a\in F$ は F を覆いかつ F がコンパクト故, その中の有限箇で F は覆われる. 従って我々は任意に $a\in F$ を選んだとき $\psi(\bar{U}_{a2})$ が V_b の中で疎なることを証明すればよい. U_a は l 次元 Euclid 空間 E^l の開集合と同相だから, それ自身 E^l の開集合と考えてよい. このように考えると ψ は E^l の開集合 U_a を Euclid 空間 E^m の中へ写す滑らかな写像となる. 我々はこのとき $\psi(\bar{U}_{a2})$ が E^m の中で疎なことを証明すればよい.

ψ が滑らかで $\bar{U}_{a1}$ がコンパクト故, 容易に判るように正の定数 c が存在して, $\bar{U}_{a1}$ の任意の 2 点 x, x' に対して

$$\rho(\psi(x), \psi(x'))\leqq c\rho(x, x') \tag{21}$$

が成立つ. E^l の任意の ε-格子を一つ選ぶ, 即ち E^l を辺の長さ ε の l 次元立方体に分ける. この格子の単位たる閉じた立方体で $\bar{U}_{a2}$ と交わるものの集合を Ω で表わす. $\bar{U}_{a2}$ はコンパクトで従って十分大きな立方体に含まれることから, Ω に含まれる [格子の] 立方体の数は, (ε を十分小にとったとき) c_1/ε^l を越えない. ここで c_1 はある正の定数で ε に関係しない. いま δ を $\bar{U}_{a2}$ と $E^l\setminus U_{a1}$ の距離とする. また $\varepsilon<\dfrac{\delta}{\sqrt{l}}$ としよう. このとき Ω に含まれる任意の立方体 L_i は U_{a1} に含まれ[1], 従って不等式 (21) により $\psi(L_i)$ は 1 辺の長さが $c\varepsilon\sqrt{l}$ なる E^m の立方体 M_i に含まれる. この立方体の体積は $c^m l^{m/2}\varepsilon^m$ である. $\psi(\bar{U}_{a2})$ は c_1/ε^l 箇以下の立方体 M_i の和集合に含まれるから $\psi(U_{a2})$ の体積は $c_1c^m\varepsilon^{-l}c^m l^{m/2}\varepsilon^m$ を越えない. [仮定により $m>l$ で,] ε はいくらでも小にとれる故, 集合 $\psi(\bar{U}_{a2})$ は開集合を含み得ない. そしてそれはコンパクトであるから必然的に E^m で疎になる.

従って C) が証明された.

D) ψ を l 次元コンパクト多様体 L から m 次元多様体 M への滑らかな写像とし, $l\leqq m-2$ とする. 両端が $\psi(L)$ に属さない M の曲線 $x(t)$; $0\leqq t\leqq 1$,

---

訳註 1) 一辺の長さ ε の l 次元立方体の主対角線の長さは $\sqrt{\underbrace{\varepsilon^2+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^2}_{l\text{箇の和}}}=\sqrt{l}\,\varepsilon$.

に対して，$x(t)$ と同一の端点を有し，$\psi(L)$ と交わらぬ曲線 $x'(t)$ をいくらでも $x(t)$ に近くとることができる．

D) を証明しよう．m 次元 Euclid 空間の閉じた球の，多様体 M の中への滑らかな同相写像による像を M の**球**ということにする．まず第一に M の任意の球 U の内部にあって $\psi(L)$ には属さぬ 2 点 a, b は，U の内部で $\psi(L)$ と交わらぬ曲線で結べることを証明しよう．$\psi(L)$ に属しない，球 U の内部の任意の 1 点を c とする．U' を U の同心球で U より "半径" が小で a, b, c をその内部に含むものとする．$F=\psi^{-1}(U')$ とおき，L' を L における F の近傍で $\psi(L')\subset U$ なるものとする．$\psi(L')$ を球 U' の表面に写す c を中心とする "中心射影" は滑らかな写像故 (C) 参照) c を出る殆どすべての "半直線" が球 U' の内部では $\psi(F)$ と交わらない．いま，V, W を a, b の近傍で球 U' の内部にあり，かつ $\psi(F)$ と交わらないものとする．このとき $a'\in V$ と c を結ぶ線分 ca' で $\psi(F)$ と交わらず，$b'\in W$ と c を結ぶ線分 cb' で $\psi(F)$ と交わらないものが存在する．点 a', b' をそれぞれ V, W の中で点 a, b と結び，点 c を a', b' と線分で結べば求める曲線が得られる．

曲線 $x(t)$ はコンパクトだから，十分小なる正数 $\varepsilon=\dfrac{1}{2n}$ (n は自然数) をとれば，任意の点 t_0, $0\leqq t_0\leqq 1$, に対し点 $x(t_0)$ の球近傍 U_{t_0} が存在して $|t-t_0|\leqq\varepsilon$ なるすべての $x(t)$ を含む．$0\leqq j\leqq n$ とすれば $x(2j\varepsilon)$ が同時に $U_{(2j-1)\varepsilon}$ と $U_{(2j+1)\varepsilon}$ に含まれる．点 $x'(2j\varepsilon)$ を球 $U_{(2j-1)\varepsilon}$ と $U_{(2j+1)\varepsilon}$ の内部にあり $\psi(L)$ に含まれないように選ぶ．球 $U_{(2j+1)\varepsilon}$ の内で点 $x(2j\varepsilon)$ と $x'((2j+2)\varepsilon)$ とを $\psi(L)$ と交わらぬように曲線 $x'(t)$, $2j\varepsilon\leqq t\leqq(2j+2)\varepsilon$ で結ぶ．こうして点 $x'(0)=x(0)$ と $x'(1)=x(1)$ を結ぶ曲線 $x'(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, が得られた．このとき，球 U_{t_0} を十分小にとれば，曲線 $x'(t)$ は $x(t)$ に近くとれる．

E) ψ をコンパクト多様体 N から m 次元多様体 M の中への滑らかな写像とし，$x(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ を M における一つの曲線とする．$\psi(y)=x(t)$, $0\leqq t\leqq 1$, をみたす任意の $y\in N$ における写像 ψ の函数行列の階数が m に等しいならば，N の 1 点 y_0 で $\psi(y_0)=x(0)$ なる条件をみたすものを任意に一つ取るとき，y_0 から出発し，$x(t)$ を被覆する N の曲線が存在する．即ち $y(0)=y_0$, $\psi(y(t))=$

$x(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, をみたす $[0,1] \to N$ の連続写像 y が存在する.

これを証明しよう. $a = x(t_0)$, $\psi(b) = a$, とし $x^1, \cdots, x^m$ を点 a のある近傍で定義された多様体 M の a のまわりの局所座標とする. また $y^1, \cdots, y^n$ を点 b のある近傍で定義された N の局所座標とし

$$x^i = \psi^i(y^1, \cdots, y^n), \ i = 1, \cdots, m$$

が写像 ψ の b の近傍での座標による表現とする. 行列 $\left\| \dfrac{\partial \psi^i}{\partial y^j} \right\|$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$ の $y^j = 0$ における階数が m に等しいから, この行列の m 箇の列は1次独立である. 考えを定めるために最初の m 列が1次独立だとしよう. そして b のまわりで N に新しい局所座標 $z^1, \cdots, z^n$ を

$$z^i = \psi^i(y^1, \cdots, y^n), \ i = 1, \cdots, m\,; \ z^j = y^j, \ j = m+1, \cdots, n$$

によって定義する. この新しい座標では写像 ψ は b の十分小さい近傍において

$$x^i = z^i, \ (i = 1, \cdots, m)$$

という形で表わされる. いま十分小さな正数 δ に対し $|z^j| < \delta$, $(j = 1, \cdots, n)$ で定められるような b の近傍で変換 ψ は上式により表わされるものとしよう. そして $\varepsilon(b, t_0)$ を十分小さな正数で, $|t - t_0| \leqq \varepsilon(b, t_0)$ ならば $|x^i(t)| < \delta$ となるものとする. ここで $x^i(t)$ は点 $x(t)$ の座標である. $|t - t_0| \leqq \varepsilon(b, t_0)$ なるときは $z^i(t) = x^i(t)$, $i = 1, \cdots, m\,; z^j = 0, j = m+1, \cdots, n$, とおく. そこで $|t - t_0| \leqq \varepsilon(b, t_0)$ なるときは $z^i(t) = x^i(t)$, $i = 1, \cdots, m\,; z^j = 0$, $j = m+1, \cdots, n$ とおき, $z^j(t), j = 1, \cdots, n$, を $z(t)$ の座標と考える. こうして $x(t)$ を $|t - t_0| \leqq \varepsilon(b, t_0)$ で覆い $y(t_0) = b$ をみたす曲線 $z(t)$, $|t - t_0| \leqq \varepsilon(b, t_0)$ を構成し得た. $\psi(b) = x(t_0)$ をみたす対 (b, t_0) の集合はコンパクトだから, 十分小で, もはや (b, t_0) に関係しない正数 ε が存在して $\psi(b) = x(t_0)$ をみたす任意の対 (b, t_0) に対して曲線 $z(t)$, $|t - t_0| < \varepsilon$ で $x(t)$, $|t - t_0| < \varepsilon$, を覆い, かつ $z(t_0) = b$ をみたすものが存在する. 区間 $[0, 1]$ を長さが $\dfrac{1}{n} \leqq \varepsilon$ となる小区間に分割して y_0 から出発して各小区間に対して曲線 $z(t)$ を構成して行けば, 求める曲線 $y(t)$ が得られる.

定理 107. G の任意の元 f は

$$f = ghg^{-1}, \ g \in G, \ h \in H$$

なる形に書ける(A)参照).

証明.　定理の終結は群 $G \times H$ から G の中への写像 ψ が上への写像である，即ち $\psi(G \times H) = G$ なることに外ならない（補助定理参照）．$\psi(G \times H)$ は G の中で閉じているから（何となれば G はコンパクトだから，定理102参照），$\psi(G \times H)$ が G の中で稠密なることを証明すればよいが，それには

$$G \setminus \mathfrak{S} \subset \psi(G \times H) \tag{22}$$

を証明すれば十分である．補助定理とC）により，集合 $\mathfrak{S}$ は G で疎だからである．そこで(22)式を証明しよう．h_* を H に含まれる任意の正則元とし，また f を $G \setminus \mathfrak{S}$ の任意の元とする．h_*, f は共に $\mathfrak{S}$ に含まれないから，補助定理とD）により $G \setminus \mathfrak{S}$ に含まれる曲線 $f(t)$ が存在して h_* と f を結ぶ．E）により (e, h_*) から出発する群 $G \times H$ 中の曲線 $(g(t), h(t))$ であって $f(t)$ を被覆するもの，即ち，

$$\psi(g(t), h(t)) = f(t)$$

となるものが存在する．$t = 1$ として

$$\psi(g, h) = f$$

を得る．

これで定理107は証明された．

定理 108.　R の任意の元 a は

$$a = g(b),\ g \in G,\ b \in S \tag{23}$$

なる形に書ける（A）参照）．

証明.　U を R における0の近傍でB）に述べた条件を $K = H$ として満すものとする．与えられた a に対して十分小なる ε をとれば $\varepsilon a \in U$ となる．定理107により元 $\varphi(\varepsilon a)$（A）参照）は

$$\varphi(\varepsilon a) = ghg^{-1},\ g \in G,\ h \in H$$

なる形に書ける．$h = g^{-1}\varphi(\varepsilon a)g \in \varphi(U)$ であるから $h = \varphi(\varepsilon b), b \in S$, となる．故に

$$\varphi(\varepsilon a) = g\varphi(\varepsilon b)g^{-1}$$

となり，B）により $\varepsilon a = g(\varepsilon b)$ が得られるから，ε で割れば(23)が得られる．

これで定理108は証明された．

定理 109. R の任意の二つの正則部分代数 S, S' に対して R の自己同型写像 $g \in G$ が存して (A) 参照)

$$S' = g(S) \tag{24}$$

となる. これから S, S' に対するルート系をそれぞれ Σ, Σ' とすれば, 同様に

$$\Sigma' = g(\Sigma) \tag{25}$$

なる関係がある. 従って特に R のルート系の計量的性質は R の不変量である.

証明. いま c, c' を S, S' を定義する R の二つの正則元としよう. 定理 108 により $c' = g(c''), g \in G, c'' \in S,$ となる. g は自己同型写像故 c'' はまた正則元である. いま S'' を c'' に対応する R の正則部分代数とする. S'' はその定義により c'' と可換な R の元の全体より成る. 従って S を含む. 一方 S と S'' は同じ次元を有するから $S = S''$ である. 一方 $c' = g(c'')$ 故 $S' = g(S'')$ であるから, (24) は証明された.

次に (25) を証明しよう. $\alpha \in \Sigma$ とすれば, 任意の $s \in S$ に対して

$$[s, r_\alpha] = i(\alpha, s) r_\alpha$$

となるから, 自己同型写像 g を作用させて

$$[s', g(r_\alpha)] = i(g(\alpha), s') g(r_\alpha)$$

が任意の $s' \in S'$ に対し成立つ. 従って $g(\alpha) \in \Sigma'$ (定義 51 参照), 即ち $g(\Sigma) \subset \Sigma'$ である. 全く同様にして $g^{-1}(\Sigma') \subset \Sigma$ が証明される.

これで定理 109 は証明された.

定理 110. G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ はコンパクトである (定義 46, 及び A) 参照).

証明. 定理 110 を証明するには, 多様体 G の基本群が有限群なることを証明すれば十分である (§ 50, E) 参照).

U を $K = H$ とした B) の条件をみたすような十分小さな, R における 0 の近傍とする. $f = f(t)$; $0 \leqq t \leqq 1$, を G における一つの閉曲線で, $\varphi(U)$ から出発し, 非正則元の集合 $\mathfrak{S}$ と交わらないものとする. いま $(g, h) = (g(t), h(t))$ を写像 ψ により曲線 $f = f(t)$ に写される曲線とする (補助定理参照). いま h が閉曲線ならば曲線 f はホモトープ 0 なることを証明しよう. $f(0) \in \varphi(U)$ だから $h(0) = \varphi(s_*), s_* \in S \frown U,$ である. φ はベクトル群 S から群 H への被覆写像

故，S には s_* から出発する h を覆う曲線 $s=s(t)$ が存在し，φ により h に写される(§50, B)，E) 参照)．h が閉曲線なら s も閉曲線なることを示そう．いま $s(1)-s(0)\neq 0$ としよう．このとき，ルート・ベクトル $\alpha\in\Sigma$ が存在して $(\alpha, s(1)-s(0))\neq 0$ となる．$\varphi(s(1))=\varphi(s(0))$ だから $(\alpha, s(1)-s(0))=2k\pi$, $k\neq 0$ となる．従って t が 0 から 1 まで変化するとき $(\alpha, s(t))$ は 2π の整数倍の値を少くとも 1 回はとらなければならぬ．従って $h(t)$ は非正則元を通ることになり，仮定に反する．単連結な S の閉曲線 s はホモトープ 0 である．いま $s_\tau=s_\tau(t)$ をこのホモトピーを与える曲線の族とする．このとき曲線 $f_\tau(t)=g(t)\varphi(s_\tau(t))(g(t))^{-1}$ は曲線 $f_0=f$ と曲線 $f_1(t)=g(t)\varphi(s_*)(g(t))^{-1}$ のホモトピーを与える．曲線 f_1 は閉曲線であるから，$g(0)\varphi(s_*)(g(0))^{-1}=g(1)\varphi(s_*)(g(1))^{-1}$ である．この式から [G の] 元 $\varphi(s_*)$ は $(g(0))^{-1}g(1)$ と可換であることが判る．一方 B) により，この可換性から $(g(0))^{-1}g(1)$ が 1 径数部分群 $\varphi(ts_*)$ 上のすべての元と可換となることが判る．従って

$$g(0)\varphi((1-\tau)s_*)(g(0))^{-1}=g(1)\varphi((1-\tau)s_*)(g(1))^{-1}=x(\tau) \quad (26)$$

が得られる．いま

$$f_\tau'(t)=g(t)\varphi((1-\tau)s_*)(g(t))^{-1}(x(\tau))^{-1}x(0) \quad (27)$$

と置く．τ を 0 から 1 まで変化させれば，曲線の族 f_τ' は曲線 $f_0'=f_1$ がホモトープ 0 なることを示す．かくして h の閉曲線なることから f のホモトープ 0 であることが導かれた．

基本群を計算するために正則元 $h_*\in H\cap\varphi(U)$ から出発する曲線を考えよう．D) と G が局所単連結なることから，$\mathfrak{S}$ と交わらぬ曲線のみを考えればよい．いま $f_j=f_j(t)$, $j=1,2$, を G の二つの閉曲線で，h_* から出発し，$\mathfrak{S}$ と交わらぬものとする．E) により $(g_j, h_j)=(g_j(t), h_j(t))$ なる $G\times H$ における曲線で (e, h_*) から出発し，ψ により f_j に写るものが存在する．曲線 h_1, h_2 が同一の端点 $h_1(1)=h_2(1)$ を持つときは，f_1, f_2 は G 中でホモトープなることを示そう．$f_1^{-1}f_2$ は $\varphi(U)$ から出発し，曲線 $(g_1^{-1}g_2, h_1^{-1}h_2)$ で被覆される．仮定から $h_1^{-1}h_2$ は閉曲線故，曲線 $f_1^{-1}f_2$ はホモトープ 0，即ち f_1, f_2 は互にホモトープである．

定理の証明を完成するには，h_* を一つ固定したとき群 H の元 h で(ある $g\in G$

に対して)条件

$$\psi(g, h) = h_*$$

をみたすものが高々有限箇しかないことを証明すればよい．これを証明しよう．H の任意の元 h は $h(r_\alpha) = \varepsilon_\alpha r_\alpha, \alpha \in \Sigma$ とするとき $\alpha \to \varepsilon_\alpha$ なる対応により一意に定まる．ε_α は1次変換 h の固有値であり，従って条件 $\psi(g, h) = h_*$ により h_* の固有値でもある．従って各ルート α に対する ε_α の全体は集合としては h_* により一意に定まる．ε_α が全体として与えられたとき $\alpha \to \varepsilon_\alpha$ なる対応のつけ方は有限箇しかない．

これで定理110は証明された．

定理110から直ちに，リー代数 R を有する連結リー群は高々有限箇しか存在しないことが導かれる．実際 R をリー代数とする[連結]リー群は $\tilde{G}/N$ なる形にかける．ここで N は群 $\tilde{G}$ の中心に含まれるディスクリートな正規部分群である．群 $\tilde{G}$ はコンパクトで，その中心 Z はディスクリート故，Z は有限群である．群 G の中心は $\{e\}$ であるから，G は $\tilde{G}/Z$ に同型である．従って Z は群多様体 G の基本群に同型である．次の例で中心が $\{0\}$ でないコンパクト・リー代数を有する任意の連結リー群の構造に関する問題を解決する．

例 106. R^* をコンパクト・リー代数とする．定理100により，R^* はその中心 C とコンパクト準単純リー代数 R の直和である．ベクトル空間 C の次元を p で表わすことにしよう．G をリー代数 R の自己同型群の単位元の連結成分とし，$\tilde{G}$ を G の普遍被覆群，Z を $\tilde{G}$ の中心とする．定理110により Z は有限群である．その位数を r とする．R^* をリー代数として有するすべての連結リー群をこれから書上げて見よう．K を法1で考えた実数の加法群[即ち1次元トーラス群]とし，X を K の位数 r の巡回部分群とする．X は $\dfrac{1}{r}$ なる実数[の法1での剰余類]をその生成元とする．いま $q \leqq p$ 箇の K と同型な群をとり $K_1, \cdots, K_q$ とし，それぞれの群の X に対応する部分群を $X_1, \cdots, X_q$ とする．そして群 $\tilde{G}, K_1, \cdots, K_q$ と次元 $p-q$ のベクトル群 B との直積 F を作る．群 F は中心に含まれる有限正規部分群として $Y = X_1 X_2 \cdots X_q Z$ を有する．R をリー代数とする任意の連結リー群は F/U なる型の群と同型であることが示される．ここで U は Y

の任意の部分群である．従って R^* をリー代数とする連結リー群は同型を除き高々有限箇しか存在しない．

これを証明しよう．ベクトルの加法群 C はリー群である．そして $C\times\tilde{G}$ は R^* をリー代数とする単連結なリー群である．群 $C\times\tilde{G}$ の中心は $C\times Z$ である．従って R^* をリー代数とする任意の連結リー群は $(C\times\tilde{G})/N$ の形である．ここで N は $C\times Z$ なる群のディスクリートな正規部分群である．部分群 $C\times e$ と部分群 N 及び NZ との交わりをそれぞれ $N'\times e$, $N''\times e$ としよう．$N'\subset N''$ で N''/N' の位数は r の約数である．そこで N'' の基底 $e_1, \cdots, e_q$ で N' の基底が $\lambda_1 e_1, \cdots, \lambda_q e_q$, 但し λ_i は r の約数（§6, E）と例 33 参照）となるものが存在する．群 $(C\times\tilde{G})/(N'\times e)$ は自然な仕方で群 F と同一視できる．その部分群 $N/(N'\times e)$ は群 Y のある部分群 U に対応する．従って

$$(C\times\tilde{G})/N\cong F/U$$

となり，我々の命題が証明された．

例 107.　定理 110 は有限次元のコンパクト位相群に対するより深い知識を与える．この応用の例として次の結果を挙げよう．

任意のコンパクト連結有限次元位相群を得るには．ある単連結なコンパクト準単純リー群 L' と，あるコンパクト連結有限次元可換位相群 H をとり，その直積 $L'\times H$ を作る．そしてその中心に含まれる有限正規部分群で部分群 H との交わりが単位元だけであるようなもので $L'\times H$ を割ればよい．

これを証明しよう．G を任意の一つの連結コンパクト有限次元位相群とする．［定理 69 により］G は単位元の近傍ではリー群芽 L と G の 0 次元の正規部分群 N の直積である．L の元の任意の有限箇の積を作ること（例 82 参照）により，一つのリー群 $\hat{L}$ と $\hat{L}$ から G の中への準同型写像 ψ が得られ，L は $\hat{L}$ の単位元の近傍で，$\psi(\hat{L})$ は G で稠密となる．このとき $\hat{L}$ は単連結としてよい（そうでなければその普遍被覆群を代りに考えればよい）．群 G/N はコンパクトであるから，$\hat{L}$ はコンパクト・リー群と局所同型になる．従って $\hat{L}$ はその部分群 L_0 及び L' の直積に分解する．ここで L_0 はベクトル群で L' は単連結な準単純コンパクト・リー群である．$H=\overline{\psi(L_0)}$ とおくと，H は G の中心に含まれる正規部

分群である．直積 $L' \times H$ の任意の元 (x, y) に対し群 G の元 $\varphi(x, y) = \psi(x)y$ を対応させれば，$\psi(\hat{L})$ が G で稠密であるから $\varphi(L' \times H) = G$ となる．従って φ は群 $L' \times H$ から群 G の上への準同型写像となる．直積因子 H の上では φ は恒等写像であり，一方群 L' の中心は有限群であるから，準同型写像 φ の核は有限群であり，核と H との交わりは単位元のみより成る．

§65. 典型リー代数とそのルート系

この§では，**コンパクトな典型リー群**とそのリー代数を同時に述べよう．更にそのルート系の計算も実行する．

典型リー群とは，$\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n$；$n \geqq 1$，及び $\mathfrak{D}_n$；$n \geqq 2$，で表わされる四つの線型リー群(即ち行列のリー群)の無限系列の中の一つをいうのである．$\mathfrak{A}_n$ は行列式 1 の $n+1$ 次のユニタリ行列の全体，$\mathfrak{B}_n$ は $2n+1$ 次の(実)直交行列の全体，$\mathfrak{C}_n$ は斜交行列の全体，即ち $2n$ 次のユニタリ行列で，一つの縮退しない歪対称双 1 次形式を不変にするものの全体，$\mathfrak{D}_n$ は $2n$ 次の (実) 直交行列の全体である．これらのすべての群は，$\mathfrak{D}_2$ を除き，すべて単純であり，その階数は n である．そして有限箇の例外を除き互に局所同型でない．

A) E^r で r 次元 Euclid ベクトル空間を表わす．即ち E^r は r 次元の実ベクトル空間で，そこで通常の内積 (u, v) が定義されているものである．いま $\mathfrak{H}_r$ で E^r の 1 次変換で内積を変えないものの全体，即ち E^r の 1 次変換 x で

$$(x(u), x(v)) = (u, v) \tag{1}$$

なる条件をみたすものの全体を表わすことにしよう．明らかに $\mathfrak{H}_r$ はコンパクト・リー群である．$\mathfrak{H}_r$ のリー代数 H_r は E^r を E^r の中へ写す 1 次変換 a で

$$(a(u), v) + (u, a(v)) = 0 \tag{2}$$

をみたすものの全体となる．E^r に正規直交系を一つとると，$\mathfrak{H}_r$ の任意の元 x は r 次の直交行列 $\| x_{jk} \|$ で表わされ，逆に任意の r 次の直交行列はある $\mathfrak{H}$ の元 x に対応する．この意味で群 $\mathfrak{H}_r$ は r 次の直交行列 $x = \| x_{jk} \|$ の全体から成ると言ってよい．全く同様にリー代数 H_r は r 次の歪対称行列 $a = \| a_{jk} \|$ 即ち

$$a^* + a = 0 \tag{3}$$

または同じことであるが,

$$a_{jk}+a_{kj}=0,\ \ j,k=1,2,\cdots,r, \tag{4}$$

をみたす行列の全体と言ってよい. リー代数 H_r の複素化 $[H_r]$ (§58, C)参照)は r 次の歪対称複素行列のすべてより成る. 即ち r 次の複素行列 $a=\|a_{jk}\|$ で条件(3)または(4)をみたすものの全体である. 後になってリー代数の系列 H_r $(r=1,2,\cdots)$ は $r=3,\ 5,\ 7,\cdots$ と $r=4,\ 6,\ 8,\cdots$ に対する二つの系列に分けるのが自然であることが判る. それを見越して次のように名付ける.

$$\mathfrak{B}_n=\mathfrak{H}_{2n+1},\ \ B_n=H_{2n+1},\ \ n=1,2,\cdots,$$

$$\mathfrak{D}_n=\mathfrak{H}_{2n},\quad D_n=H_{2n},\quad n=2,3,\cdots.$$

A)における命題中証明を要するものは, $\mathfrak{H}_r$ のリー代数 H_r が条件(2)をみたす1次変換全体より成ることのみである. これを次に証明しよう. いま x_t を E^r の[正則]1次変換全体の群の1径数部分群で, a を原点における接ベクトルとして持つものとする. x_t が $\mathfrak{H}_r$ に属するならば,

$$(x_t(u),x_t(v))=(u,v)$$

が成立つから, $t=0$ で微分して(2)を得る. 逆に a が(2)をみたすとしよう. このとき§54, B)により

$$\frac{d}{dt}(x_t(u),x_t(v))=(ax_t(u),x_t(v))+(x_t(u),ax_t(v))=0$$

となり, 従って $(x_t(u),x_t(v))=(u,v)$ となる. かくしてリー代数 H_r が条件(2)をみたす E^r の1次変換全体より成ることが証明された.

B) U^{n+1} で $n+1$ 次元の**ユニタリ・ベクトル空間**, 即ち, $n+1$ 次元の複素ベクトル空間で**ユニタリ内積**[Hermite 形式], 即ち通常の内積とは $(u,v)=\overline{(v,u)}$ となる点のみが異なるものが定義されたものとする. $\mathfrak{A}_n$ で U^{n+1} の1次変換で内積を変えずかつ行列式が $+1$ となるものの全体を表わす. 即ち $\mathfrak{A}_n$ は

$$(x(u),x(v))=(u,v), \tag{5}$$

$$\det x=1 \tag{6}$$

なる2条件をみたす U^{n+1} の1次変換の全体である. リー群 $\mathfrak{A}_n$ のリー代数 A_n は U^{n+1} の1次変換 a で

$$(a(u), v) + (u, a(v)) = 0, \tag{7}$$

$$\mathrm{Sp}\ a = 0 \tag{8}$$

なる条件をみたすものの全体である．ここで$\mathrm{Sp}\,a$は1次変換aのシュプールを表わす（§61参照）．U^{n+1}に正規直交系をとるときは，$\mathfrak{A}_n$の任意の元xは$n+1$次の**ユニモジュラー・ユニタリ行列**$\|x_{jk}\|$で表わされ，逆に$n+1$次のユニモジュラー・ユニタリ行列$\|x_{jk}\|$は$\mathfrak{A}_n$のある元xに対応する．かくして群$\mathfrak{A}_n$は$n+1$次のユニモジュラー・ユニタリ行列の全体から成ると言ってよい．同様の意味でリー代数A_nは$n+1$次の複素行列$a=\|a_{jk}\|$で条件

$$\bar{a}^* + a = 0, \tag{9}$$

$$\mathrm{Sp}\,a = 0 \tag{10}$$

をみたすものの全体，或は同じことであるが

$$\bar{a}_{kj} + a_{jk} = 0, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{jj} = 0 \tag{12}$$

をみたすものの全体であると言える．リー代数A_nの元は複素行列によって表わされるが，それにも拘らずリー代数A_nは実リー代数である．何となればA_nは通常の実変数のコンパクト・リー群のリー代数である[1)]．

リー代数A_nの元に実数を乗ずるのは複素行列に実数を乗ずる通常の乗法であり，リー代数A_nの元の加法は複素行列の通常の加法であり，交換子演算は§54,（1）式で定義される．リー代数A_nの複素化$[A_n]$（§58, C）参照）は$n+1$次の複素行列で唯一つの関係式

$$\mathrm{Sp}\,c = 0 \tag{13}$$

をみたすものの全体と考えてよい．更にリー代数A_nの複素化$[A_n]$のAに関する共役写像は

$$c \longrightarrow -\bar{c}^* \tag{14}$$

なる対応で定義される．

訳註 1）複素リー代数を持つリー群でコンパクトなものは偶数次元のアーベル群しかないことが容易に証明される．文献追加〔286〕Prop. 12, cor. 3参照．

まず第一にリー代数 A_n は条件(7),(8)をみたすすべての1次変換よりなることを証明しよう．複素ベクトル空間 U^{n+1} のすべての1次変換の作る群を実リー群と考えたものを $\mathfrak{L}_{n+1}$ とする．更に $x(t)$ を $\mathfrak{L}_{n+1}$ の1径数部分群とし，a をその接ベクトルとする．リー群 $\mathfrak{L}_{n+1}$ のリー代数 L_{n+1} はもちろんベクトル空間 U^{n+1} をそれ自身の中へ写すすべての1次変換の全体より成る．1径数部分群 x_t が条件(5)をみたす変換より成るための必要かつ十分な条件は，a が条件(7)をみたすことである．この事実は命題A)における類似の事実と全く同様にして証明される．$x_t = \|x_{jk}(t)\|$ を $\mathfrak{L}'_{n+1}$ の1径数部分群とする．但し $\mathfrak{L}'_{n+1}$ は $\mathfrak{L}_{n+1}$ の元 x で(6)なる条件をみたすものの全体の作るリー群である．いま L'_{n+1} を条件(8)をみたす $a \in L_{n+1}$ の全体の作る L_{n+1} の部分代数とする．いま部分代数 L'_{n+1} は部分群 $\mathfrak{L}'_{n+1}$ に対応することを証明しよう．これが証明できれば，リー代数 A_n は二つの条件(7),(8)をみたす［U^{n+1} の］1次変換 a の全体より成ることが証明されたことになる．さて $a = \|a_{jk}\|$ と置く．直ちに判るように

$$\frac{d}{dt}\det\|x_{jk}(t)\|\,]_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{jj}$$

であるから，x_t が $\mathfrak{L}'_{n+1}$ に含まれるならば $\mathrm{Sp}\,a = 0$ である．リー代数 L'_{n+1} の［実の］次元は L_{n+1} の次元より2だけ低い．同様に $\mathfrak{L}'_{n+1}$ の次元は $\mathfrak{L}_{n+1}$ の次元より2だけ低い．従って上述のことから $\mathfrak{L}'_{n+1}$ は部分代数 L'_{n+1} に対応する．

次にリー代数 A_n の複素化 $[A_n]$ は複素リー代数 L'_{n+1} と一致し，更に $[A_n]$ における A_n に関する共役写像は(14)で与えられる．§58, C)により［A_n］の任意の元 c は形式的な和として

$$c = a + bi,\ a \in A_n,\ b \in A_n, \tag{15}$$

という形に書ける．c に対する共役元は形式的な和

$$d = a - bi \tag{16}$$

で定義される．(15)式における i を乗ずること及び a と bi の加法を［形式的でなく］複素行列 a 及び b に対する通常のスカラー乗法及び加法の意味とすれば，L'_{n+1} に属する行列 c が得られる．リー代数［A_n］から L'_{n+1} の中へのこの写像は1対1で L'_{n+1} の上への写像であることを証明しよう．$c \in L'_{n+1}$ に対し

$$a=\frac{c-\bar{c}^*}{2},\qquad b=\frac{c+\bar{c}^*}{2i} \tag{17}$$

と置けば，(15)式がみたされ，かつ複素行列 a, b は共に(9)及び(10)を満たす．［故に上述の写像は L'_{n+1} の上への写像で，］一方 (15) 式における A_n に属する行列 a 及び b は［上の如く (15) におけるスカラー乗法及び加法を複素行列における通常の算法とみて得られる行列 c を使って］関係式 (17) で一意に定まる．［従って上の写像は 1 対 1 でもある．］更に(16)における a 及び b に (17) なる表示を代入すれば，

$$d=-\bar{c}^*$$

が得られる．

これで命題 B)は完全に証明された．

偶数次(2 n 次)の行列のある種の計算に対しては，行列を 2 次の小行列に分解して 2 次の行列を要素とする n 次の行列と見るのが便利である．即ち $x=\|y_{jk}\|$; $j, k=1, \cdots, 2n$, を $2n$ 次の正方行列とするとき

$$x_{pq}=\begin{Vmatrix} y_{2p-1,\,2q-1} & y_{2p-1,\,2q} \\ y_{2p,\,2q-1} & y_{2p,\,2q} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} x_{pq}{}^{11} & x_{pq}{}^{12} \\ x_{pq}{}^{21} & x_{pq}{}^{22} \end{Vmatrix}$$

と置けば

$$x=\|x_{pq}\|;\ p, q=1, \cdots, n \tag{18}$$

となる．この書き方に対応して $2n$ 次元のベクトル空間のベクトル成分も

$$u=\{u^1, \cdots, u^n\},\quad u^p=\{u_1{}^p, u_2{}^p\} \tag{19}$$

という形に書くことができる．この書き方では行列 x に対応する 1 次変換は座標成分で表わすとき

$$v_j{}^p=\sum_{q,\,k} x_{pq}{}^{jk} u_k{}^q \tag{20}$$

なる形に表わされ，行列 x に対応する双 1 次形式 $x(u, v)$ は

$$x(u, v)=\sum_{j,k,p,q} x_{pq}{}^{jk} u_j{}^p v_k{}^q \tag{21}$$

という形に書かれる．最後に(18)の形に書かれた二つの $2n$ 次の行列 $x=\|x_{pq}\|$, $x=\|x'_{pq}\|$ の積は

$$xx' = \| z_{pq} \|, \quad z_{pq} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{p\alpha} x'_{\alpha q}$$

なる形に書ける．ここで積 $x_{p\alpha} x'_{\alpha q}$ は二つの 2 次の行列の積である．

C)　U^{2n} を $2n$ 次元のユニタリ・ベクトル空間とし，任意の一つの正規直交系をとって基底とする．この基底に対し，行列

$$\| f_{pq} \|, \ p, q = 1, \cdots, n\,; \ f_{pq} = \delta_{pq}\sigma, \ \sigma = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{22}$$

によって(21)の形に表わされる双 1 次形式 $f(u, v)$ が与えられたとしよう．

ここで　$\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & (p = q) \\ 0 & (p \neq q) \end{cases}$　である．

ベクトル空間 U^{2n} をそれ自身の中へ写す 1 次変換で双 1 次形式 $f(u, v)$ を不変にする，即ち

$$f(x(u), x(v)) = f(u, v) \tag{23}$$

なる条件をみたすものの全体を $\mathfrak{K}_n$ とする．$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{K}_n \cap \mathfrak{A}_{2n-1}$ (B)参照) と置く．明らかに，$\mathfrak{C}_n$ はコンパクト・リー群である．リー群 $\mathfrak{K}$ のリー代数 K_n は U^{2n} をそれ自身の中へ写す 1 次変換 a で

$$f(a(u), v) + f(u, a(v)) = 0 \tag{24}$$

をみたすものの全体である．行列 a が(18)の形，$a = \| a_{pq} \|$, $p, q = 1, \cdots, n$, に書けているときは条件(24)は

$$a_{qp}{}^* = \sigma a_{pq} \sigma \quad \text{または} \quad a_{qp} = \sigma a_{pq}{}^* \sigma \tag{25}$$

という形に表わすことができる．条件(25)は，2 次の行列 a_{pq} に対し

$$\mathrm{Sp}(a_{pp}) = 0 \tag{26}$$

で，a_{qp} の内 $q > p$ なるものは a_{pq} により定められるが，$p < q$ に対する a_{pq} は任意に与えられることと同値である．(26)から $\mathrm{Sp}(a) = 0$ なることが出る．このようにしてリー群 $\mathfrak{C}_n$ のリー代数 c_n は U^{2n} をそれ自身の中へ写す 1 次変換 a であって条件(25)及び

$$\bar{a}^* + a = 0 \tag{27}$$

をみたすものの全体であることになる((19)参照，条件(10)は(25)から導かれることに注意せよ)．リー代数 C_n の複素化 $[C_n]$ はリー代数 K_n と一致すると

考えてよい．このとき $[C_n]$ における共役写像は

$$c \longrightarrow -\bar{c}^* \tag{28}$$

で与えられる．

命題C) を証明しよう．リー代数 K_n が条件 (24) をみたすすべての1次変換より成ることは，命題 A) における同様の部分の証明と全く同じようにしてできる．行列で表わすと，条件(24)は

$$fa + a^*f = 0 \tag{29}$$

という形になる．(22)を使うと

$$\sigma a_{pq} + a_{qp}{}^*\sigma = 0 \tag{30}$$

とも書ける．$\sigma^{-1} = -\sigma$ であるから，(30)から(25)が出る．$p = q$ に対しては条件(25)は $a_{pp}{}^{11} = -a_{pp}{}^{22}$ 即ち (26) ということで，このとき $a_{pp}{}^{12}$ 及び $a_{pp}{}^{21}$ は任意である．

$[C_n]$ の任意の元 c は形式的な和として

$$c = a + bi,\ a \in C_n,\ b \in C_n, \tag{31}$$

と表わされる．命題 B) の証明と同様に，(31)の演算を形式的なものでなく通常の行列の演算の意味にとれば，$a \in K_n, b \in K_n$ であるから $c \in K_n$ である．逆に $c \in K_n$ ならば，B) の証明と同様に

$$a = \frac{c - \bar{c}^*}{2},\ b = \frac{c + \bar{c}^*}{2i}$$

と置けば(31)が得られる．従って $[C_n] = K_n$ としてよい．(28)式は B) と全く同様に証明できる．

定理 111. A_n, B_n, C_n, D_n なるリー代数は，D_1 を除き，すべてコンパクト準単純リー代数で，その階数は n であり，n 次元の正則部分代数 S_n が存在する．

リー代数 A_n のルート系 $\Sigma(A_n)$ を記述するために n 次元ベクトル空間 S_n は $(n+1)$ 次元の Euclid ベクトル空間 E^{n+1} に含まれていると考えよう．E^{n+1} の中に同じ長さを有する直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}$ を選べば，ルート系 $\Sigma(A_n)$ は次のように表わされる．

$$\Sigma(A_n) = \{e_j - e_k\,;\ j \neq k, j, k = 1, \cdots, n+1\}. \tag{32}$$

リー代数 B_n, C_n, D_n に対しては S_n の中に同じ長さの直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ を取るときは，対応するルート系はそれぞれ次のように表わされる．

$$\Sigma(B_n) = \{\pm e_j, j=1,\cdots,n\,;\ \pm e_j \pm e_k, j<k\,;\ j,k=1,\cdots,n\}, \tag{33}$$

$$\Sigma(C_n) = \{\pm 2e_j, j=1,\cdots,n\,;\ \pm e_j \pm e_k, j<k\,;\ j,k=1,\cdots,n\}, \tag{34}$$

$$\Sigma(D_n) = \{\pm e_j \pm e_k, j<k\,;\ j,k=1,\cdots,n\}. \tag{35}$$

リー代数 A_n に対しては空間 S_n は E^{n+1} の中で上にとった基底による座標成分が

$$s^1 + s^2 + \cdots + s^{n+1} = 0 \tag{36}$$

をみたす超平面であることを注意しておこう．

定理111を証明するために，次の一般的な命題D) を準備として証明しよう．

D)　R をコンパクト・リー代数とし，S を R の一つの可換部分代数，$\Sigma' = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\}$ を純虚数の値をとる互に異なり，0でない S 上の1次形式の有限箇の系とする．更にこれが次の条件をみたすものと仮定する．a) S の任意のベクトル $s \neq 0$ に対し1次形式 φ_j が存在して $\varphi_j(s) \neq 0$. b) 各1次形式 φ_j に対し R の複素化 $[R]$ の0でないベクトル r_j が存在して，任意の $s \in S$ に対し $[s, r_j] = \varphi_j(s) r_j$ となる．r_j を1次形式 φ_j の**固有ベクトル**という．c)　ベクトル空間 S の元とすべての r_j の複素係数の1次結合の全体が $[R]$ と一致する．このときリー代数 R は準単純で，S はその正則部分代数であり，各1次形式 φ_j に対して $i(\alpha_j, s) = \varphi_j(s), s \in S$ で定まるベクトル α_j をとれば，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ がリー代数 R のルート系である．

命題D) を証明しよう．まず第一に S の元 c で $\varphi_j(c), j=1,\cdots,k,$ なる複素数が互に相異なりかつ0でないように選ぶことができる．このとき R の元 a が

$$[c, a] = 0 \text{ をみたすならば } a \in S \tag{37}$$

であることを証明しよう．条件 c) から a は

$$a = b + \sum_{j=1}^{k} \tau_j r_j, \quad b \in [S], \tag{38}$$

と表わされる．1次変換 p_c の m 乗，$m = 1, 2, \cdots k,$ をベクトル a に作用させると，条件 b) によって

$$0=(p_c)^m(a)=\sum_{j=1}^{k}(\varphi_j(c))^m\tau_j r_j,\quad m=1,\cdots,k,\tag{39}$$

となる．複素数 $\varphi_j(c)$, $j=1,\cdots,k$ は互に異なり，かつ 0 でないから，関係式 (39) から $\tau_j=0$, $j=1,\cdots k$ が得られる．従って $a=b\in[S]\cap R=S$ となる．

次にリー代数 R の中心が 0 のみより成ることを証明しよう．これによって R が準単純なることが証明される (定理 100, 101 参照)．いまリー代数 R の中心が 0 でない元 a を含むと仮定しよう．上に証明したことから $a\in S$ である ((37) 参照)．条件 a) によって $\varphi_j(a)\neq 0$ となる 1 次形式 φ_j が存在する．$[a, r_j]=\varphi_j(a)r_j\neq 0$ となるから，元 a が R の中心に含まれることに反し不合理である．

次に S がリー代数 R の正則部分代数であることを証明しよう．S' を R のある一つの正則部分代数としよう．定理 108 によって元 c はある $c'\in S'$ によって $c=g(c')$ と書ける．ここで g は R の一つの自己同型写像である．従って元 c を含む R の正則部分代数 $S''=g(S')$ が存在する．部分代数 S'' は可換故，その各元は元 c と可換である．従って上に証明した c の性質 ((37) 参照) によって $S''\subset S$ を得る．正則部分代数 S'' は極大可換部分代数であるから，この最後の包含関係から $S''=S$ が得られる．

定義 51 より直ちにベクトル $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ の全体がリー代数 R のルート系をなすことが導かれる．

これで命題 D) は証明された．

そこで定理 111 の証明は，各リー代数 A_n, B_n, C_n, D_n に対し可換部分代数 S_n と 1 次形式 φ_j の系で命題 D) の条件をみたすものを求めるという容易に示される事柄に帰着したことになる．

定理 111 の証明． A_n) $s^1, \cdots, s^{n+1}$ を

$$s^1+s^2+\cdots+s^{n+1}=0\tag{40}$$

という条件をみたす実数の $n+1$ 箇の組とし，これに対して，行列 $s=\|s_{jk}\|$,

$$s_{jk}=is^j\delta_{jk}\tag{41}$$

(添数 j について加え合わせない) を考える．行列 s は純虚数の要素より成る $n+1$ 次の対角行列である．そして s は $s^*+s=0$ 及び $\mathrm{Sp}(s)=0$ ((40) 参照)

をみたす．従って s はリー代数 A_n に含まれる((9), (10)参照)．かかる行列 s の全体はリー代数 A_n の可換部分代数 S_n を作る．次に A_n の1次形式の系 Σ' と固有行列を構成しよう．整数 $p \neq q; p, q = 1, \cdots, n+1$, によって定められる行列 $r = r(p, q) = \| r_{jk} \|$ を考えよう．その要素は

$$r_{jk} = \delta_{jp}\delta_{kq}, \quad j, k = 1, \cdots, n+1, \tag{42}$$

で与えられる．$r(p, q)$ の要素で0でないものは $r_{pq} = 1$ のみである．行列 r はリー代数 $[A_n]$ に含まれる．それは $\mathrm{Sp}(r) = 0$ なる条件をみたすからである．交換子 $t = \| t_{jk} \| = [s, r] = sr - rs$ を計算しよう．

$$\begin{aligned} t_{jk} &= \sum_{\alpha} is^j \delta_{j\alpha}\delta_{\alpha p}\delta_{kq} - \sum_{\alpha} i\delta_{jp}\delta_{\alpha q}s^{\alpha}\delta_{\alpha k} \\ &= is^j\delta_{jp}\delta_{kq} - is^q\delta_{jp}\delta_{qk} = i(s^p - s^q)r_{jk} \end{aligned}$$

であるから

$$[s, r(p, q)] = i(s^p - s^q)r(p, q) \tag{43}$$

が得られる．S_n の上で定義された1次形式 $i(s^p - s^q)$, $(p \neq q)$ の全体を Σ' とする．部分代数 $S = S_n$ と Σ' が命題 D)の諸条件をすべてみたすことは容易に確かめられる．

次にベクトル $s \in S_n$ に対し基本2次形式 (s, s) を計算しよう．§61 の命題 C)により $(s, s) = -\mathrm{Sp}(p_s p_s)$ である．複素数 $i(s^p - s^q)$ は1次変換 p_s の固有値であって，p_s の0でない固有値は $i(s^p - s^q)$ でつくされるから[1)]

$$\begin{aligned} (s, s) = -\mathrm{Sp}(p_s p_s) &= -\sum_{p,q=1}^{n+1} i^2(s^p - s^q)^2 = 2n\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2 - 4\sum_{p<q} s^p s^q \\ &= (2n+2)\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2 - 2\left(\sum_{p=1}^{n+1} s^p\right)^2 = (2n+2)\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2 \end{aligned}$$

((40)参照)となる．いま，実数 $s^1, \cdots, s^{n+1}$ を Euclid 空間 E^{n+1} の一つの基底 $f_1, \cdots, f_{n+1}$ に対するベクトル s の成分と考えよう．但し E^{n+1} におけける内積は

$$(s, s) = (2n+2)\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2$$

で与えられるものとする．このとき Euclid 空間 S_n は Euclid 空間 E^{n+1} の(40)

訳註 1) 原書には以下の四つの式の右辺の係数が $2n+4$ となっているが，これは明らかに誤りと思われるので誤りの原因である途中の計算と共に訂正した．

なる条件をみたす部分空間［超平面］として含まれる．基底 $f_1, \cdots, f_{n+1}$ は互に直交し，その長さは皆 $\sqrt{2n+2}$ である．ベクトル

$$\alpha(p, q) = \frac{1}{2n+2} f^p - \frac{1}{2n+2} f^q$$

はもちろん，条件 $(\alpha(p, q), s) = s^p - s^q$ をみたす．$e_p = \dfrac{1}{2n+2} f_p$ と置けば，空間 E^{n+1} の基底 $e_1, \cdots, e_{n+1}$ が得られ，定理の条件をみたす（D）参照）．

C_n）　リー代数［C_n］に属する行列は (18) のように次の正方行列に分けて書くことができる．いま

$$\tau = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \tag{44}$$

という 2 次の正方行列を考えれば，n 箇の実数の組 $s^1, \cdots, s^n$ に対して $2n$ 次の正方行列 $s = \| s_{jk} \|$ が対応する（(18) 参照）．但し

$$s_{jk} = is^j \delta_{jk} \tau \tag{45}$$

である（ここで添数 j については総和しない）．このような形の行列 s の全体 S_n はリー代数 C_n の可換部分代数を作っている．リー代数 C_n と S_n に対して D) の条件をみたす 1 次形式の系 Σ' と対応する固有行列を求めよう．そのためにまず行列 τ の固有ベクトルを求めよう．いま

$$\rho(\varepsilon) = \begin{Vmatrix} 1 & + & \varepsilon \\ 1 & - & \varepsilon \end{Vmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

という 2 行 1 列の行列を考えれば，直ちに知られるように

$$\tau \rho(\varepsilon) = \varepsilon \rho(\varepsilon) \tag{46}$$

であるから，$\rho(1)$ 及び $\rho(-1)$ が行列 τ の固有ベクトルである．(46) 式の両辺の転置行列を考えれば

$$\rho(\varepsilon)^* \tau = \varepsilon \rho(\varepsilon)^* \tag{47}$$

が得られる．行列としての積 $\rho(\delta)\rho(\varepsilon)^*$，$\varepsilon = \pm 1$；$\delta = \pm 1$ は 2 次の正方行列で二つの実数 ε，及び δ により定まる．(46), (47) から

$$s^p \tau \rho(\delta) \rho(\varepsilon)^* - s^q \rho(\delta) \rho(\varepsilon)^* \tau = (\delta s^p - \varepsilon s^q) \rho(\delta) \rho(\varepsilon)^* \tag{48}$$

が成立つ．また行列 $\rho(\delta)\rho(-\delta)^*$ は容易に知られるように

$$\mathrm{Sp}(\rho(\delta)\rho(-\delta)^*) = 0 \tag{49}$$

という条件を満足する．いま $p \leqq q$；$p, q = 1, \cdots, n$, $\varepsilon = \pm 1, q = \pm 1$,（但し $p = q$ ならば $\delta = -\varepsilon$）なる p, q, δ, ε に対して

$$r_{jk} = \delta_{jp}\delta_{kq}\rho(\delta)\rho(\varepsilon)^* + \delta_{jq}\delta_{kp}\sigma\rho(\varepsilon)\rho(\delta)^*\sigma, \quad p<q, \tag{50}$$

$$r_{jk} = \delta_{jp}\delta_{kp}\rho(\delta)\rho(-\delta)^*, \qquad p = q \tag{51}$$

((22)参照)で jk 要素 r_{jk} が定義される行列 $r(p, q, \delta, \varepsilon)$ を考える．$p<q$ ならば行列 $r(p, q, \delta, \varepsilon)$ の 0 でない要素は $r_{pq} = \rho(\delta)\rho(\varepsilon)^*$ 及び $r_{qp} = \sigma\rho(\varepsilon)\rho(\delta)^*\sigma$ の二つだけで，$r(p, q, \delta, \varepsilon)$ はリー代数 $[C_n]$ に属す．また行列 $\rho(p, p, \delta, -\delta)$ の 0 でない要素は $r_{pp} = \rho(\delta)\rho(-\delta)^*$ だけで，$p(p, p, \delta, -\delta)$ もまたリー代数 $[C_n]$ の元である((49)参照)．(48), (50), (51), (45)から直ちに知られるように

$$[s, r(p, q, \delta, \varepsilon)] = i(\delta s^p - \varepsilon s^q) r(p, q, \delta, \varepsilon), \quad p<q. \tag{52}$$

$$[s, r(p, p, \delta, -\delta)] = 2i\delta s^p r(p, p, \delta, -\delta). \tag{53}$$

S_n 上の 1 次形式の系 Σ'：$i(\delta s^p - \varepsilon s^q)$，$p<q$；$2i\delta s^p$ とそれらに対する固有行列 $r(p, q, \delta, \varepsilon)$，$p<q$；$r(p, p, \delta, -\delta)$ が命題 D) の条件をみたすことは容易に確かめられる．また $[A_n]$ の場合と全く同様な計算で，n に関係する定数を ν として，

$$(s, s) = \nu \sum_{p=1}^{n} (s^p)^2 \tag{54}$$

の形に書けることが判る．これと命題 D) から (34) の正しいことが確かめられる．［実は $\nu = 2n + 2$ である．］

D_n)　$[D_n]$ に属する任意の行列 a を (18) のような書き方で $a = \| a_{jk} \|$, $i, k = 1, \cdots, n$, と書く．ここで a_{jk} は 2 次の正方行列である．行列 a がリー代数 $[D_n]$ に属するための条件 (3) は，a_{jk} に対する

$$a_{kj}^* + a_{jk} = 0 \tag{55}$$

という条件で表わされる．これは行列 a_{jk}, $j<k$, は任意に選ぶことができ，a_{jk}, $j>k$, はそれらによって定まり，行列 a_{jj} は歪対称行列であることを意味する．n 箇の実数 $s^1, \cdots, s^n$ に対して

$$s_{jk} = s^j \delta_{jk} \sigma \tag{56}$$

((22)参照. ここで添数 j については総和しない) なる2次の正方行列を用いて(18)の形の $2n$ 次の正方行列 $s=\|s_{jk}\|, j, k=1, \cdots, n$, を作る. このような行列 s の全体 S_n は D_n の可換な n 次元部分代数を作る. 次に D_n に対し命題D) の条件をみたす1次形式の系 Σ' と対応する固有行列を求めよう. まず行列 σ の固有ベクトルを2行1列の行列の形に書いて見る. いま

$$\pi(\varepsilon)=\left\|\begin{matrix}1\\ i\varepsilon\end{matrix}\right\|, \quad \varepsilon=\pm 1, \tag{57}$$

とすれば, 直ちに確かめられるように

$$\sigma\pi(\varepsilon)=i\varepsilon\pi(\varepsilon) \tag{58}$$

が成立つから, $\pi(1)$ 及び $\pi(-1)$ が行列 σ の固有ベクトルである. (58)式の両辺の転置行列を考えれば

$$\pi(\varepsilon)^*\sigma=-i\varepsilon\pi(\varepsilon)^* \tag{59}$$

が得られる. $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$ で定まる2次の正方行列 $\pi(\delta)\pi(\varepsilon)^*$ は(57)により

$$s^p\sigma\pi(\delta)\pi(\varepsilon)^*-s^q\pi(\delta)\pi(\varepsilon)^*\sigma=i(\delta s^p+\varepsilon s^q)\pi(\delta)\pi(\varepsilon)^* \tag{60}$$

という関係をみたす. そこで2次の正方行列

$$r_{jk}=\delta_{jp}\delta_{kq}\pi(\delta)\pi(\varepsilon)^*-\delta_{jq}\delta_{kp}\pi(\varepsilon)\pi(\delta)^*, \quad p<q, \tag{61}$$

を(18)の如く並べてできる $2n$ 次の正方行列 $r=r(p,q,\delta,\varepsilon)=\|r_{jk}\|$, $p<q$; p, $q=1, \cdots, n$; $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$, を考えれば, r の要素で0でないものは $r_{pq}=\pi(\delta)\pi(\varepsilon)^*$ と $r_{qp}=-\pi(\varepsilon)\pi(\delta)^*$ であって, この二つが(55)の条件をみたしているから r はリー代数 $[D_n]$ の元である. (56), (60), (61)から容易に

$$[s, r(p,q,\delta,\varepsilon)]=i(\delta s^p+\varepsilon s^q)r(p,q,\delta,\varepsilon), \quad p<q, \tag{62}$$

であることが確かめられるから, 1次形式の系 Σ': $i(\delta s^p+\varepsilon s^q)$, $p<q$; $p, q=1, 2, \cdots, n$; $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$, は命題D) の条件をみたす. A_n の場合と同様にして, n に関係する定数 μ [$\mu=2n-2$ である.] により基本2次形式は

$$(s, s)=\mu\sum_{p=1}^{n}(s^p)^2$$

と表わされる. これからD)により(35)式の正しいことが証明される.

B_n)　$2n+1$ 次の任意の歪対称行列 b は $2n$ 次の歪対称行列 a の右に1列，下に1行を附加して得られる．歪対称性から添加する列ベクトルを u とすれば，添加する行ベクトルは $-u^*$ である．そこで我々はこのように $2n$ 次の歪対称行列 a と n 次の縦ベクトル（n 行1列の行列）から出来る $2n+1$ 次の歪対称行列 b を $b=\{a,u\}$ で表わすことにしよう．そして0のみよりなる行及び列を添加して生ずる行列 $\{a,0\}$ を簡単のため，唯 a で表わすことにする．このようにすれば，リー代数 D_n はリー代数 B_n の部分代数となる．そこで上に構成した D_n の部分代数 S_n（D_n の項参照）は B_n の可換部分代数でもあり，$[D_n]$ に属する固有行列 $r(p,q,\delta,\varepsilon)$，$p<q$ はリー代数 $[B_n]$ の固有行列である．しかし部分代数 S_n の元と固有行列 $r(p,q,\varepsilon,\delta)$ の1次結合で表わされる元の全体は $[D_n]$ であって，$[B_n]$ 全体にならないから，D_n に対する1次形式の系 Σ' に他の要素を補わなければならない．いま整数 $p=1,\cdots,n$ と $\delta=\pm1$ で定まるベクトル $u=u(p,\delta)$ を

$$u^j=\delta_{jp}\pi(\delta) \tag{63}$$

で定義（(57)参照）し，2次の0行列に $u(p,\delta)$ を添加して $[B_n]$ に属する行列 $r(p,\delta)=\{0,u(p,\delta)\}$ を得る．そしてこれに対して

$$[s,r(p,\delta)]=i\delta s^p r(p,\delta) \tag{64}$$

が成立つことは直ちに確かめられる．そこで S_n 上の1次形式の系 Σ' として $i(\varepsilon s^p+\delta s^q)$，$p<q$；$i\delta s^p$，$p,q=1,\cdots,n$，$\delta=\pm1$，$\varepsilon=\pm1$，をとれば，$\Sigma'$ は D) の条件をみたし，従って(33)が証明される．

これで定理111は完全に証明された．

E)　リー代数 A_n, B_n, C_n, D_n の次元はそれぞれ n^2+2n, $2n^2+n$, $2n^2+n$, $2n^2-n$ である．

これらのリー代数の次元はルート系に属するベクトルの数に n を加えたものである（§63, E)参照）から，E)は定理111から直ちに証明される．

定理112.　リー代数 A_n, B_n, C_n，$n\geqq1$，及び D_n；$n\geqq3$，は単純である．またリー代数 A_1, B_1, C_1 は互に同型であり，B_2 と C_2 も同型，A_3 と D_3 も同型である．そしてこれ以外にはリー代数 A_n, B_n, C_n, D_n の間の同型関係は存在しない．従

って互に同型でない典型リー代数をすべて数え上げれば，次の四つの系列となる.

$$A_n,\ n\geqq 1\ ;\quad B_n,\ n\geqq 2\ ;\quad C_n,\ n\geqq 3\ ;\quad D_n,\ n\geqq 4.$$

またリー代数 D_2 は A_1 と同型な二つのリー代数の直和となる.

証明. 同型なリー代数の階数は等しいから，リー代数 $A_n, B_n, C_n, D_n,\ n=1,2,\cdots,$ の間で添数 n の異なるものは互に同型ではない. 同じ階数 n のものの間の同型関係を調べるために，それらの次元を考えよう. E)により，A_n と B_n または A_n と C_n が同型であり得るのは $n^2+2n=2n^2+n$ 即ち $n=1$ のときだけであり，A_n と D_n が同型であり得るのは $n^2+2n=2n^2-n$ 即ち $n=3$ のときだけである. B_n と D_n または C_n と D_n は同型に成り得ない. それは $2n^2+n=2n^2-n$ となるのは $n=0$ のときだけだからである. また $n>2$ なるときは B_n と C_n も同型となり得ない. それは B_n 及び C_n のルート系には共に2種類の長さのベクトルが含まれるが，$\Sigma(B_n)$ では長さの短いベクトルの数が $2n$ であるのに，$\Sigma(C_n)$ では短いベクトルの数が $2n^2-2n$ であるから，$n>2$ ならばその数が $2n$ より大となり，B_n と C_n のルート系は合同でなく，従って B_n と C_n は同型ではあり得ないからである(定理109参照).

ルート系 $\Sigma(A_1)$, $\Sigma(B_1)$, $\Sigma(C_1)$ はすべて長さの等しく方向の反対な二つのベクトルよりなるから互に相似であり，従って A_1, B_1, C_1 は同型であり(§63, B)及び定理106参照)，すべて例105のリー代数と同型である.

ルート系 $\Sigma(B_2)$ 及び $\Sigma(C_2)$ はそれぞれ

$$\Sigma(B_2)=\{\pm e_1,\ \pm e_2\ ;\ \pm e_1\pm e_2\},$$
$$\Sigma(C_2)=\{\pm 2e_1',\ \pm 2e_2'\ ;\ \pm e_1'\pm e_2'\}$$

である. ベクトル e_1, e_2 の張る平面からベクトル e_1', e_2' の張る平面の上への1次変換

$$e_1 \longrightarrow e_1'+e_2',$$
$$e_2 \longrightarrow e_1'-e_2'$$

は相似変換で，この変換により $\Sigma(B_2)$ は $\Sigma(C_2)$ に写されるから，リー代数 B_2 と C_2 は同型である.

ルート系 $\Sigma(A_3)$, $\Sigma(D_3)$ はそれぞれ

$$\Sigma(A_3) = \{e_j' - e_k',\ j \neq k\,;\, j, k = 1, \cdots, 4\},$$
$$\Sigma(D_3) = \{\pm e_j \pm e_k,\ j < k = 1, 2, 3\}$$

という形をしている．ベクトル e_j の張る空間からベクトル e_j' の張る空間の中への1次変換

$$e_1 \longrightarrow \frac{1}{2}(e_1' + e_2' - e_3' - e_4'),$$
$$e_2 \longrightarrow \frac{1}{2}(e_1' - e_2' + e_3' - e_4'),$$
$$e_3 \longrightarrow \frac{1}{2}(e_1' - e_2' - e_3' + e_4')$$

は $\Sigma(D_3)$ を $\Sigma(A_3)$ の上へ写す合同変換である．従って A_3 と D_3 は同型である．

これで典型リー代数の間にある同型関係はすべて尽くされたことになる．次にこれらのリー代数が単純であることの証明に移ろう．そのためには§63のH) を用いる．

$\Sigma(A_n)$ が二つの部分系 Σ_1 及び Σ_2 に分解したとしよう．$e_1 - e_2$ はそのどちらかに属するから，いま $e_1 - e_2 \in \Sigma_1$ となったとしよう．このとき $e_j - e_k \in \Sigma_2$ ならば $e_1 - e_2$ と $e_j - e_k$ は互に垂直であるから，j 及び k は共に1でも2でもない．このとき $e_1 - e_j$ は $\Sigma(A_n)$ の元であるが Σ_1 にも Σ_2 にも含まれない．それは，$e_1 - e_j$ は $e_1 - e_2$ 及び $e_j - e_k$ のどちらにも垂直でないからである．そこで $\Sigma(A_n)$ が分解しているということから矛盾が生じた故，$\Sigma(A_n)$ は分解しない．$\Sigma(B_{n+1})$, $\Sigma(C_{n+1})$, $\Sigma(D_{n+1})$ は皆 $\Sigma(A_n)$ を部分集合として含む((32), (33), (34), (35)参照)．従ってこの三つのルート系の内の一つが部分系 Σ_1, Σ_2 に分解したとすれば，$\Sigma(A_n)$ は Σ_1, Σ_2 のいずれかに含まれる．いま $\Sigma(A_n) \subset \Sigma_1$ としよう．このとき Σ_2 に含まれるベクトルはすべて $\Sigma(A_n)$ のベクトルと直交するから，$\lambda(e_1 + \cdots + e_{n+1})$ の形でなければならぬ．所がこの形のベクトルを含みこの形でない Σ の元がすべてこの形の元と直交するのは $\Sigma(D_2)$ だけである．これで $n \geqq 1$ に対する A_n, B_n, C_n 及び $n \geqq 3$ に対する D_n が単純であることが証明された．$\Sigma(D_2)$ が $\Sigma(A_1)$ と相似な二つの部分系に分解することは明らかである．

これで定理112は証明された．

例 91 及び例 108 で典型コンパクト・リー群の基本群と中心は求められているから，これを一つの命題にまとめると次のようになる．

F) 準単純なコンパクト・リー代数 R をリー代数とする単連結な連結リー群を $G(R)$ とすれば，R が典型リー代数の場合には次のことが成立つ．

a) 群 $G(A_n)$ の中心は位数 $n+1$ の巡回群，

b) 群 $G(B_n)$ の中心は位数 2 の巡回群，

c) 群 $G(C_n)$ の中心は位数 2 の巡回群，

d) 群 $G(D_n)$ の中心は位数 4 の群であり，n が偶数ならば二つの位数 2 の巡回群の直積で，n が奇数のときは位数 4 の巡回群である．

この命題の証明は例 91 と次の例 108 に含まれている．

ここで注意すべきは命題 F) からはリー代数 B_n と C_n とが同型でないことは導かれないことである．それは $G(B_n)$ と $G(C_n)$ の中心が同型であることに基づいている．そこで B_n と C_n とが同型でないことの証明は，前にやったように定理 109 を使うことが必要になって来るが，この定理は §64 の内容に本質的に依存しているのである．このことは分類の理論で本質的に重要なることであるが，しばしば見逃がされている(例えば Dynkin の論文〔9〕を見よ)．

例 108. 群 $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{C}_n$ は連結且つ単連結である．群 $\mathfrak{A}_n$ の中心は e を単位行列として $\left(\cos\dfrac{2\pi}{n+1}+i\sin\dfrac{2\pi}{n+1}\right)e$ から生成される位数 $n+1$ の巡回群であり，群 $\mathfrak{C}_n$ の中心は e 及び $-e$ より成る．

まず第一に $\mathfrak{A}_1$ 及び $\mathfrak{C}_1$ は一致し，共に絶対値 1 の 4 元数の作る乗法群(§26, A)参照)と同型であることを示そう．$n=1$ に対しては条件 (23) は条件 (6) と一致するから $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{C}_1$ である．

$$z=\begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{Vmatrix}$$

のような 2 次の複素行列が群 $\mathfrak{A}_1$ に属するための条件は

$$\left.\begin{array}{ll} z_{11}\bar{z}_{11}+z_{12}\bar{z}_{12}=1, & z_{21}\bar{z}_{21}+z_{22}\bar{z}_{22}=1, \\ z_{11}\bar{z}_{21}+z_{12}\bar{z}_{22}=0, & z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}=1 \end{array}\right\} \qquad (65)$$

である．いま $z_{11}=x$, $z_{12}=y$ とすれば，条件 (65) から $z_{21}=-\bar{y}$, $z_{22}=\bar{x}$ とな

るから，$\mathfrak{A}$ は

$$z=\begin{Vmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{Vmatrix},\qquad x\bar{x}+y\bar{y}=1,$$

という形の行列の全体である．この行列 z に4元数 $\varphi(z)=x+yj$ を対応させれば，写像 φ は群 $\mathfrak{A}_1$ から絶対値1の4元数の作る乗法群の上への同相写像であって，しかも群としての同型写像でもある．

群 $\mathfrak{A}_n$ はユニタリ空間 U^{n+1} の内積を変えない1次変換の群である．いま $(x, x)=1$ をみたす U^{n+1} の元 x の全体を S^{2n+1} とすれば $\mathfrak{A}_n$ の元は内積を変えないから，S^{2n+1} をも変えない．複素ベクトル空間 U^{n+1} を $2(n+1)$ 次元の実ベクトル空間と考えれば，S^{2n+1} は $2n+1$ 次元の単位球面を表わす．同様に $\mathfrak{C}_n$ はユニタリ空間 U^{2n} の1次変換の作る群であって，$4n-1$ 次元の球面 S^{4n-1} を不変にする．このとき群 $\mathfrak{C}_n$ は球面 S^{4n-1} の上に推移的に作用し，1点を固定する元の作る部分群 $\mathfrak{C}'_{n-1}$ は $\mathfrak{C}_{n-1}$ に同型であることを証明しよう．U^{2n} の一つの基底の最初のベクトルを p として，この基底に関して双1次形式 f が(22)の形に表わされたとしよう．このときはベクトル p を不変にする $\mathfrak{C}_n$ の元 u はこの基底の2番目のベクトルをも変えない．従って1点 p を固定する元の作る $\mathfrak{C}_n$ の部分群は $\mathfrak{C}_{n-1}$ と同型である．S^{4n-1} の点であって群 $\mathfrak{C}_n$ の元による p の像となるものの作る集合 M を考えれば，群 $\mathfrak{C}_n$ は集合 M の上には推移的に作用するから，M の次元は群 $\mathfrak{C}_n$ の次元から群 $\mathfrak{C}_{n-1}$ の次元を引いたもの即ち $4n-1$ に等しい．従って M は $4n-1$ 次元球面 S^{4n-1} の $4n-1$ 次元部分多様体だから，$M=S^{4n-1}$ でなければならぬ．即ち群 $\mathfrak{C}_n$ は S^{4n-1} の上に推移的に作用する変換群である．従って多様体 $\mathfrak{C}_n/\mathfrak{C}'_{n-1}$ は球面 S^{4n-1} に同相である．全く同様にして多様体 $\mathfrak{A}_n/\mathfrak{A}'_{n-1}$ は球面 S^{2n+1} と同相である．これから群 $\mathfrak{A}_{n-1}$ 及び群 $\mathfrak{C}_{n-1}$ が連結ならば $\mathfrak{A}_n$ 及び $\mathfrak{C}_n$ もまた連結となるが，群 $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{C}_1$ は連結だから帰納法によりすべての $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{C}_n$ が連結である．更に例90の結果から $\mathfrak{A}_n$ 及び $\mathfrak{C}_n$ の基本群は3次元球面の基本群と同型で，従って単位元だけからできている．

1次変換群 $\mathfrak{A}_n$ 及び $\mathfrak{C}_n$ は球面に推移的に作用するから既約であり，従ってその中心は各ゝの群に属するスカラー行列から成る（§31, E)参照)．これから群

$\mathfrak{A}_n$ 及び $\mathfrak{C}_n$ の中心が初めに述べた群となることが知られる.

§66. コンパクト単純リー代数の分類

この§では，単純なコンパクト・リー代数は前の§で構成した四つの無限系列

$$A_n,\ n\geqq 1\ ;\ B_n,\ n\geqq 2\ ;\ C_n,\ n\geqq 3\ ;\ D_n,\ n\geqq 4$$

のどれか一つに属するリー代数と同型であるか，五つの**例外リー代数**

$$G_2,\ \ F_4,\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8$$

のどれか一つに同型であることを証明しよう.

例外リー代数の構成には本書では立入らない.

前に述べたようにコンパクトな単純リー代数の分類はそのルート系の分類に帰着する．そこでこの§ではルート系の分類を実行する．ルート系はその定義からすれば，あるリー代数のルートの全体であるが，ここではまずベクトルの集合としてのルート系を特徴付ける性質を与えよう．その性質をみたすベクトルの集合を σ **系**と呼ぶことにする．実際は分解しない(§63, H)参照)任意の σ 系はあるコンパクト単純リー代数のルート系になっているのであるが，本書では五つの例外リー代数に対応する σ 系に対してはそれをルート系に持つリー代数の構成に立入らない．ここで述べる σ 系の分類は Dynkin の方法によるものである.

A) Γ を一つの Euclid 空間における 0 でないベクトルの集合で，Γ に含まれる任意の 2 元 λ, μ に対して $2(\lambda, \mu)/(\lambda, \lambda)$ が整数となる，という性質を持つものとする．いま Γ に属する平行でない二つのベクトル α, β のなす角を φ としよう．また考えをきめるために $(\alpha, \alpha)\leqq(\beta, \beta)$ としておく．このとき次の関係が成立つ.

$$\cos\varphi=\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{r},\ \varepsilon=\pm 1,\ r=0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

$$r\neq 0 \text{ ならば } \quad \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)}=r, \tag{2}$$

$$r \neq 0 \text{ ならば } \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \varepsilon r; \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \varepsilon, \tag{3}$$

$$r = 0 \text{ ならば } \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0, \tag{4}$$

$r=0$ ならば，ベクトル α, β の長さの間には定まった関係がない．

命題 A) を証明しよう．

$$p = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}, \quad q = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \tag{5}$$

とおく．このとき

$$\cos^2\varphi = \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \frac{pq}{4} \tag{6}$$

となるが，$(\alpha, \alpha) \leqq (\beta, \beta)$ と仮定したから $|p| \geqq |q|$ であり，従って p, q という整数の対のとり得る値は次のものしかない．

$$\left.\begin{array}{ll} p=0, \quad q=0 & ; \quad p=\pm 1, q=\pm 1, \\ p=\pm 2, q=\pm 1 & ; \quad p=\pm 3, q=\pm 1. \end{array}\right\} \tag{7}$$

α と β は平行でないとしたから $pq=4$ となることはない．更に $(\alpha, \beta) \neq 0$ と仮定すれば，(5)式から

$$\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{p}{q} \tag{8}$$

が得られる．A) の結論が成立つことは (5), (6), (7), (8) から知れる．

B)　Euclid 空間の 0 でないベクトルの集合 Γ が次の 2 性質 a) b) を持つとき **σ 系**という．　a)　$\lambda \in \Gamma$ と整数 r に対して $r\lambda \in \Gamma$ となるのは $r=\pm 1$ のときで，またそのときに限る．　b)　λ, μ を Γ に属する平行でない任意の二つのベクトルとし，$l \geqq 0, m \geqq 0$ を $\mu - j\lambda, j = l, l-1, \cdots, 1, 0, -1, \cdots, -m$, がすべて Γ に属するような最大の整数とするとき

$$l - m = \frac{2(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)} \tag{9}$$

が成立つ．

定理 105 によりコンパクト準単純リー代数のルート系はすべて σ 系である．

定理 113.　任意の σ 系 Γ (B) 参照) に対して 1 次独立な元より成る部分集合

$B=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ で次の性質をみたすものが存在する.

1) B の相異なる二つの元 α, β に対しては常に

$$(\alpha, \beta) \leqq 0 \tag{10}$$

が成立つ.

2) Γ の任意の元 λ は

$$\lambda = \varepsilon(a^1\beta_1 + a^2\beta_2 + \cdots + a^n\beta_n) \tag{11}$$

という形に表わされる. ここで $\varepsilon = \pm 1$ で, $a^1, \cdots, a^n$ はすべて負でない整数である.

与えられた σ 系 Γ は性質 1), 2) を持つ 1 次独立な部分集合 B により一意的に定まる. 即ち B の計量的性質 [B に属する 2 元の内積] を知れば, (11) のような形の 1 次結合で表わされるベクトルの内 Γ に属するものをすべて見出だすことができる.

証明. いま σ 系 Γ は一つの Euclid ベクトル空間 S の中に与えられているとしよう. S の任意の一つの基底 $e_1, \cdots, e_n$ を選び, それに関する座標成分により S の元に字引式の順序を入れる (§63, F) 参照).

まずこのとき S の正のベクトルの集合 $x_1, \cdots, x_m$ で

$$(x_j, x_k) \leqq 0, \quad (j \neq k) \tag{12}$$

という条件をみたすものは必らず 1 次独立となることを証明しよう.

これを帰謬法により証明するために $x_1, \cdots, x_m$ は 1 次従属と仮定しよう. $x_1, \cdots, x_m$ の 1 次従属な部分集合中, 元の箇数が最小なるものを一つとり $y_1, \cdots, y_n$ とする. このとき $y_1, \cdots, y_n$ の間には 1 次関係

$$b^1y_1 + \cdots + b^ny_n = 0 \tag{13}$$

であって係数 $b^1, b^2, \cdots, b^n$ がすべて 0 と異なるものが存在する. このとき係数 b^i がすべて正またはすべて負ならば (13) の左辺は正または負のベクトルを表わし, 0 とならないから, 係数 b^i の中には正のものも負のものも実際存在する. そこで (13) の左辺の各項の内, 正の係数を持つものだけの和を u とし, 負の係数を持つものだけの和を $-v$ とすれば, (13) 式は $u = v$ という等式と同じことになる. $u = v$ の両辺と u との内積を作れば $(u, u) = (u, v)$ が得られるが,

この式の左辺は正で，右辺は仮定の(12)式から正でないから，矛盾に到達した．これで x_i が1次独立であることは証明された．

いま σ 系 Γ の正のベクトルが Γ に属する二つの正のベクトルの和に分解できないとき**単純**であるということにする．このとき，Γ の単純なベクトルの全体を $B=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ とすれば，この B が定理の条件1)，2)をみたすことが証明される．従っていま証明したばかりの事実から B は1次独立であることも証明される．

初めに B が1)をみたすことを証明しよう．いま $(\beta_i, \beta_j)>0$ とすれば σ 系の定義から $\beta_i-\beta_j \in \Gamma$ となる．二つのベクトル $\beta_i-\beta_j, \beta_j-\beta_i$ は共に Γ に属し，一方は正で一方は負である．そこで考えをきめるために $\beta_i-\beta_j=\gamma>0$ としよう．このとき $\beta_i=\beta_j+\gamma$ となり，単純なベクトル β_i が Γ に属する二つの正のベクトル β_j と γ の和に分解されるから，矛盾である．従って1)が成立つ．

次に部分集合 B が条件2)をみたすことを証明しよう．$\lambda \in \Gamma$ を正のベクトルとしよう．λ が単純ならば，ある j に対して $\lambda=\beta_j$ となる故(11)の形に λ が書かれる．λ が単純でなければ $\lambda=\alpha+\beta$ と Γ に属する二つの正のベクトル α, β の和となる．α または β が単純でなければ，更に分解を続ければ λ は $\varepsilon=1$ として(11)の形に書かれることになる．λ が負のベクトルならば，$-\lambda$ が正だから $\varepsilon=-1$ として λ は(11)の形に書かれる．

このようにして σ 系 Γ の1次独立な部分集合 B で1)，2)をみたすものが存在することが証明された．

次に $B=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ を1)，2)をみたす1次独立な Γ の任意の部分集合とするとき B の計量的性質により，σ 系 Γ が逆に定まることを証明しよう．いま Γ の元であって $a^1\beta_1+\cdots+a^n\beta_n$ と表わしたとき係数が負でない整数でしかも $0<a^1+\cdots+a^n \leqq a$ をみたすものの全体を Γ_a とする．最初に $\gamma \in \Gamma_{a+1}-\Gamma_a$, $a \geqq 1$，となる任意の γ は $\gamma=\beta+\alpha$, $\beta \in \Gamma_a$, $\alpha \in \Gamma_1=B$ という形に書けることを証明しよう．このために B の元の実係数1次結合の全体が作るベクトル空間 S に基底 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ に関する座標成分によって字引式に順序を入れる．条件2)

により正のベクトルの組 $\beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma$ は1次従属であるから，条件 1) と証明の最初に述べた1次独立性の条件からベクトル β_i の中に $(\gamma, \beta_i) > 0$ となるものが存在する((12)参照)．これから σ 系の定義により直ちに $\beta = \gamma - \beta_i \in \Gamma$ となる．ベクトル β は(11)の形に書表わされるが，その際その係数の和は a であるから，$\beta \in \Gamma_a$ である．従って $\gamma = \beta + \alpha$, $\beta \in \Gamma_a$, $\alpha \in B$ となる．そこで(11)の形のベクトル中どれが Γ_a に属するかということまで判ったと仮定して(11)の形の元の内でどれが Γ_{a+1} に属するかを B の計量的性質から定められることを示そう．まず Γ_{a+1} の元 γ は $\gamma = \beta + \alpha, \beta \in \Gamma_a, \alpha \in \beta$, と書くことができることは判っているのだから，$\beta + \alpha, \beta \in \Gamma_a$, $\alpha \in B$, の形の元の中どれが Γ_{a+1} に属するかという判定法を見出だせばよい．Γ_a は既知としているから，$\beta - j\alpha$, $j = 1, 2, \cdots$, という形のベクトルはどれが Γ に属し，どれが Γ に属さないかは判っている訳である．そこで σ 系 Γ の定義(B)参照)に出て来る Γ の2元 β, α に対し定まる整数 l は判っている．従って $p = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ を知れば $m = l - p$ も判る．$m = 0$ ならば $\beta + \alpha \notin \Gamma_{a+1}$, $m > 0$ ならば $\beta + \alpha \in \Gamma_{a+1}$ である．そこで B の計量的性質からすべての自然数 a に対する Γ_a が定まるから $\Gamma_+ = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots$ とすれば $\Gamma = \Gamma_+ \cup (-\Gamma_+)$ となり，Γ は B の計量的性質から一意的に定まることになる．

これで定理113は証明された．

C) Γ を一つの σ 系とし，B を定理113の条件 1), 2) をみたす Γ の1次独立な部分集合とする．Γ が分解する(§63, H)参照)のは B が分解するとき，かつそのときに限る．

命題 C) を証明しよう．Γ が二つの部分系 Γ', Γ'' に分解すれば，B も $B \cap \Gamma'$, $B \cap \Gamma''$ なる二つの部分に分解する．逆に B が二つの部分 B', B'' に分解したと仮定しよう．定理113の証明における記号を用い，Γ_a の元で B' の元の1次結合で表わされる元の全体を Γ_a', Γ_a の元で B'' の元の1次結合となる元の全体を Γ_a'' とする．このとき Γ_a が Γ_a' と Γ_a'' に分解すると仮定すれば($a = 1$ ときこれは確かに成立つ) Γ_{a+1} も Γ'_{a+1} と Γ''_{a+1} に分解することを証明しよう．

$\gamma \in \Gamma_{a+1}$ とすれば，$\gamma = \beta + \alpha$, $\beta \in \Gamma_a$, $\alpha \in B$ と表わされる．帰納法の仮定に

よりベクトル β は Γ_α' または Γ_α'' のどちらか一方に属する．考えをきめるために $\beta\in\Gamma_\alpha'$ としよう．そうすると $\alpha\in B'$ となる．これを示すために反対に $\alpha\in B''$ と仮定しよう．このとき，$\beta-\alpha$ を B の元による1次結合として表わしたとき正の係数も負の係数(α の係数は負である)も同時に現われることになるので，定理113の2)により $\beta-\alpha\notin\Gamma$ であるからB)の記号で $l=0$ である．一方またこのとき $p=\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=0$ だから $m=l-p=0$ 即ち $\gamma=\beta+\alpha\notin\Gamma$ となり，矛盾である．従って $\gamma=\beta+\alpha\in\Gamma'_{a+1}$ となり，$\Gamma_+'=\Gamma_1'\cup\Gamma_2'\cup\cdots$；$\Gamma_+''=\Gamma_1''\cup\Gamma_2''\cup\cdots$ とおけば Γ_+ が Γ_+' と Γ_+'' の二つの部分に分解することがわかった．従ってまた Γ が分解する．

これでC)は証明された．

D)　Euclid ベクトル空間の1次独立なベクトルの集合 $B=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ は二つの部分に分解せず(§63, H) 参照)しかもその任意の相異なる二つの元 α, β に対して $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ が正でない整数となるとき **π 系**と呼ぶことにする．π 系に属するベクトルの数をその π 系の**階数**という．任意の π 系 $B=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ は一つの**連結な線状複体** L により図示できる．即ち L の頂点 $(\beta_1),\cdots(\beta_n)$ は B の元 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ と1対1に対応し，L の相異なる二つの頂点 (β_i), (β_j) はベクトル β_i, β_j のなす角の余弦が $\dfrac{-1}{2}\sqrt{r}$，$r=0,1,2,3$ であるとき r 箇の稜で結ばれているものとすればよい．このとき L が連結なことは B が分解しないということから直ちに知られる．このような π 系の線状複体 L による図示では，π 系に属するベクトルの数と二つのベクトルの間の角が与えられるだけでベクトルの長さが判らないから，複体 L は π 系を完全に定めるものではない．

E)　リー代数のルート系は σ 系であるから，ルート系

$$\Sigma(A_n),\ n\geqq1\ ;\quad \Sigma(B_n),\ n\geqq2, \tag{14}$$

$$\Sigma(C_n),\ n\geqq3\ ;\quad \Sigma(D_n),\ n\geqq4, \tag{15}$$

(定理111参照)は分解しない σ 系である．これらの σ 系の定理113の条件をみたす部分集合はそれぞれ一つの π 系であって，次の式で与えられるものはその一つである．

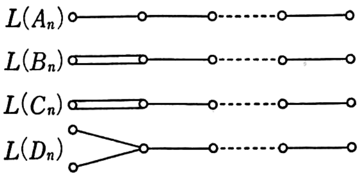
$$\pi(A_n)=\{e_2-e_1,\ e_3-e_2,\ \cdots,\ e_{n+1}-e_n\}, \tag{16}$$

$$\pi(B_n) = \{e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1}\}, \tag{17}$$

$$\pi(C_n) = \{2e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1}\}, \tag{18}$$

$$\pi(D_n) = \{e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1}\}. \tag{19}$$

これらに対する線状複体は第4図の通りである.



(20)
(21)
(22)
(23)

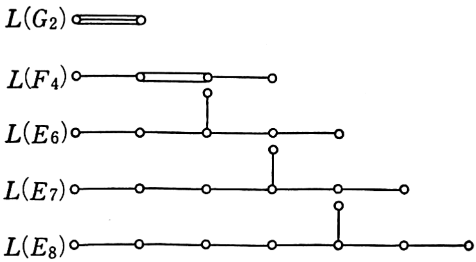
第 4 図

命題 E) の成立つことは直ちに確かめられる.

F)　典型リー代数の四つの無限系列の外に，五つの**例外リー代数**と呼ばれ, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 で表わされるリー代数が存在する. これらの五つのリー代数のルート系及び π 系

$$\pi(G_2), \pi(F_4), \pi(E_6), \pi(E_7), \pi(E_8) \tag{24}$$

は，この§の G) に述べてある. これらのリー代数の π 系に対する線状複体は次の第5図で与えられる.



(25)
(26)
(27)
(28)
(29)

第 5 図

定理 114.　任意のコンパクト単純リー代数は次のリー代数の内の一つと同型である.

$$A_n, n \geqq 1\ ;\ B_n, n \geqq 2\ ;\ C_n, n \geqq 3\ ;\ D_n, n \geqq 4\ ; \tag{30}$$

$$G_2,\quad F_4,\quad E_6,\quad E_7,\quad E_8. \tag{31}$$

証明.　コンパクト準単純リー代数はそのルート系により一意的に定まり（定

理106参照)，ルート系は定理113の条件1), 2) をみたす π 系により一意的に定まる．そこで定理114を証明するためには，任意の π 系は(16)—(19)，(24)の内のどれか一つと相似なことを示せばよい．そのためにまず任意の π 系に対して作られた線状複体 L は(20)—(23)，(25)—(29)の内のどれか一つと同じ形であることを示そう．

このとき複体 L は π 系 B のベクトルの間の角で完全に定まりベクトルの長さに関係しない．そこで n 次元の Euclid 空間の中における n 箇の1次独立な直線からなる図形が(合同なものは同じと考えて)一意的に L から定められる．複体 L から定められた，この直線の作る図形が実際 n 箇の1次独立な直線から成るのは，L が前に挙げた(20)—(23), (25)—(29) の内の一つに一致する場合に限ることを証明すれば，π 系から作られた複体は(20)—(23), (25)—(29)の内の一つとなる．そこでこれ以外の形の複体から定められた n 箇の直線から成る図形は1次独立な直線を n 箇含むことができないことを示せばよい．

L を π 系 $B=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ に対応する線状複体とする．γ_i を β_i 方向の単位ベクトルとし，頂点 (β_i) と (β_j) を結ぶ稜の数を r_{ij} とすればベクトル γ_i, γ_j のなす角の余弦は $-\dfrac{1}{2}\sqrt{r_{ij}}$ である．いま $c^1, \cdots, c^n$ が n 箇の実数でその中に少なくとも一つは0でないものがあるものとすれば

$$\gamma = c^1\gamma_1 + \cdots + c^n\gamma_n$$

とおくとき

$$0 < (\gamma, \gamma) = (c^1)^2 + \cdots + (c^n)^2 - \sum_{i<j} c^i c^j \sqrt{r_{ij}} \tag{32}$$

となる．従って一つの複体 L に対し，その稜の数 r_{ij} が定まるから，これに関して

$$(c^1)^2 + \cdots + (c^n)^2 - \sum_{i<j} c^i c^j \sqrt{r_{ij}} \leqq 0 \tag{33}$$

となるような n 箇の実数 $c^1, \cdots, c^n$ で少なくとも一つの c^j は0でないようなものを見出だすことができれば，この複体 L は n 箇の1次独立な直線を含む図形に対応しないことになる．

更に L' を L の任意の部分複体とする．即ち L' は L の頂点及び稜の内のい

くつかを頂点及び稜とする複体とする．いま考えをきめるために L の頂点中最初の m 箇 $(\beta_1), \cdots, (\beta_m)$ が L' の頂点の全体になっているとしよう．L' の稜は L の稜の一部分だから L と同様に二つの頂点が 4 本またはそれ以上の稜で結ばれることはない故，やはり Euclid 空間の m 箇の直線から成る図形を定める．いま部分複体 L' において頂点 (β_i) と (β_j) を結ぶ稜の数を r'_{ij} とすれば，もちろん

$$r'_{ij} \leqq r_{ij}$$

が成立つ．そこで $c^{m+1} = \cdots = c^n = 0$ で $c^1, \cdots, c^m$ が負でなければ

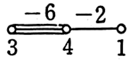
$$(c^1)^2 + \cdots + (c^m)^2 - \sum_{i<j} \sqrt{r_{ij}}\; c^i c^j \leqq (c^1)^2 + \cdots + (c^m)^2 - \sum_{i<j} \sqrt{r'_{ij}}\; c^i c^j$$

が成立つ．そこで部分複体 L' に対して負でない実数の組 $c^1, \cdots, c^m$ で少なくとも一つは 0 でないものが存在して

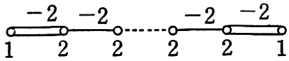
$$(c^1)^2 + \cdots + (c^m)^2 - \sum_{i<j} \sqrt{r'_{ij}}\; c^i c^j \leqq 0 \tag{34}$$

となれば，複体 L に対しても同様の不等式 (33) を成立たせる少なくとも一つは 0 でない実数の組 $c^1, \cdots, c^n$ が存在することになる．

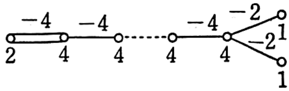
次の第 6 図の九つの複体において，頂点 (β_i) の下に書いてある数字は $(c^i)^2$ を示し，頂点 (β_i) と (β_j) を結ぶ稜の上に書いてある数字は $-c^i c^j \sqrt{r'_{ij}}$ を示す．そしてここに与えた c^i は皆不等式 (34) をみたしている．従って第 6 図の九つの複体 (35)—(43) は π 系に対する複体の部分複体となり得ない．図の内 (36), (37), (38), (40) では頂点の数 n は括弧の中に示した任意の値をとり得る．この 4 種類の複体に対しては頂点の数 n がそこに示してあるように多くの値をとり得ることを示すために，図では点線が用いてある．



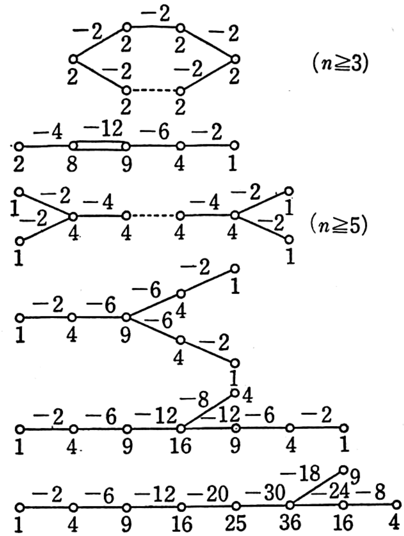
(35)



$(n \geqq 3)$　(36)



$(n \geqq 4)$　(37)



第 6 図

第 6 図から次のことが知れる．

まず複体 L が 3 重の稜を持つならば，それは他の稜を持ち得ない((35)参照)．従ってこのとき L は $L(G_2)$ の形である．

また複体 L が 2 重の稜を持つときは，2 重の稜は唯一つで((36)参照)分岐点を持ち得ない((37)参照)．またサイクル(閉じた輪)を含むことができない((38)参照)． 従って L が 2 重稜を持ち，しかも 2 重稜の両端に共に他の稜が接続しているときは，L は $L(F_4)$ の形でなければならぬ((39)参照)．また複体 L が 2 重稜を持ち，その 2 重稜が L の端になっているとき (即ち 2 重稜の内高々一つの端にしか他の稜が接続していないとき)は L は $L(B_n)$ の形である．

最後に複体 L が 1 重稜のみを含むとしよう．L は二つ以上の分岐点を持ち得ない((40), $n>5$ 参照)し，また一つの頂点が四つまたはそれ以上の相異なる頂点と結ばれることもない((40), $n=5$ 参照)．また L はサイクルを含まない((38)参照)． 従って L に分岐点がなければ L は $L(A_n)$ の形である． 分岐点があるときは，分岐点から出ている稜の内少なくとも一つは端になっている［つまりそ

れに更に接続する稜は存在しない〕((41)参照). そこで分岐点から出る稜の内二つが端になっているときは，L は $L(D_n)$ の形である. また分岐点から出る稜の内唯一つが端になっているときは，L は $L(E_6)$, $L(E_7)$, $L(E_8)$ の内のどれか一つの形となる((42), (43)参照).

これで π 系に対する複体は(20)—(23), (25)—(29)の内のどれか一つの形をしていることが証明された. そこで逆に複体 L が(20)—(23), (25)—(29)のいずれか一つの形をしているとき，対応する π 系 B が一意に定まるかどうかを考えて見よう. 各複体に対して，対応する π 系が存在するかということも問題になるが，これは，複体(20)—(23)に対しては既に存在することが証明されている(E)参照). 複体(25)—(29)に対しても π 系の存在は次の命題G)で証明される. さて一意性の問題を解決するために，複体 L の頂点 (β_i) (β_j) が r 箇の稜で結ばれているとき，ベクトル β_i, β_j の長さの間には

$$\frac{(\beta_i, \beta_i)}{(\beta_j, \beta_j)} = r^{\pm 1}$$

という関係があることに注意しよう. そこで $r=1$ のときは上式での複号 ± 1 はどちらでも同じで，上式は $(\beta_i, \beta_i) = (\beta_j, \beta_j)$ を表わす. そこで複体 L が1重の稜だけから成るときは，L は連結だから，すべてのベクトル $\beta_1, \cdots, \beta_n$ が同一の長さを持つことになり，この場合は π 系 B は複体 L により相似変換を除き一意的に定まる. 複体 $L(G_2)$ は二つしか頂点を有しないから，対応する π 系も二つのベクトルから成り，その長さの自乗の比が $1:3$ である. どちらが1でどちらが3であるかは複体からは定まらないが，どちらであるとしても π 系としては同じものが生ずる. また複体 $L(B_n) = L(C_n)$ は2重稜が一つあるから，その両端の頂点を (β_1), (β_2) としよう. $n=2$ のときは二つのベクトル β_1, β_2 の内どちらが長いかは複体からは定まらないが，ベクトルの集合としてはどちらが長くても同じものである. $n>2$ ならば，ベクトル β_1 がベクトル β_2 より短いときは対応する π 系は $\pi(B_n)$ であり，β_1 が β_2 より長いときは対応する π 系は $\pi(C_n)$ である. また複体 $L(F_4)$ も2重稜を有するが，この2重稜の端のどちらが長さの長いベクトルに対応しているとしても，同一の π 系 $\pi(F_4)$ が

得られる.

これで定理114は完全に証明された.

G)　$e_1, e_2, \cdots$ を一つの Euclid ベクトル空間の正規直交系とし, $e^{(r)} = e_1 + \cdots + e_r$ とする. 五つの**例外リー代数**のルート系は相似変換を除き次の形をしている.

$$\Sigma(G_2) = \{e_i - e_j;\ \pm(e^{(3)} - 3e_i);\ i, j = 1, 2, 3\}, \tag{44}$$

$$\Sigma(F_4) = \{\pm e_i;\ \pm e_i \pm e_j;\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4);\ i, j = 1, 2, 3, 4\}, \tag{45}$$

$$\Sigma(E_6) = \{e_i - e_j;\ \pm\sqrt{2}\, e_7;\ \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e_7 + \frac{1}{2} e^{(6)} - e_i - e_j - e_k\right);\ i, j, k = 1, 2, \cdots, 6\}, \tag{46}$$

$$\Sigma(E_7) = \{e_i - e_j;\ \left(\frac{1}{2} e^{(8)} - e_i - e_j - e_k - e_m\right);\ i, j, k, m = 1, 2, \cdots, 8\}, \tag{47}$$

$$\Sigma(E_8) = \{\pm e_i \pm e_j;\ \pm\left(\frac{1}{2} e^{(8)} - e_i\right);\ \pm\left(\frac{1}{2} e^{(8)} - e_i - e_j - e_k\right);\ i, j, k = 1, \cdots, 8\}. \tag{48}$$

これらの式において各元の文字の添数はすべて互に相異なるものとする. これらに対する π 系はそれぞれ次の式で与えられる.

$$\pi(G_2) = \{e_2 - e_1;\ e^{(3)} - 3e_2\}, \tag{49}$$

$$\pi(F_4) = \{e_3 - e_2;\ e_2 - e_1;\ e_1;\ \frac{1}{2}(e_4 - e_1 - e_2 - e_3)\}, \tag{50}$$

$$\pi(E_6) = \{e_2 - e_1;\ e_3 - e_2;\ e_4 - e_3;\ e_5 - e_4;\ e_6 - e_5;\ \frac{\sqrt{2}}{2} e_7 + \frac{1}{2} e^{(6)} - e_4 - e_5 - e_6\}, \tag{51}$$

$$\pi(E_7) = \{e_2 - e_1;\ e_3 - e_2 \cdot e_4 - e_3;\ e_5 - e_4;\ e_6 - e_5;\ e_7 - e_6;\ \frac{1}{2} e^{(8)} - e_4 - e_5 - e_6 - e_7\}, \tag{52}$$

$$\pi(E_8) = \{e_1 + e_2;\ e_2 - e_1;\ e_3 - e_2;\ e_4 - e_3;\ e_5 - e_4;$$

$$e_6-e_5\,;\ e_7-e_6\,;\ e_8-\frac{1}{2}e^{(8)}\}. \qquad (53)$$

これらのリー代数の次元はそれぞれ 14, 52, 78, 133, 248 である. 五つの例外リー代数はどの二つも同型でなく, どれも, 典型リー代数と同型でない.

式(44)—(48) が実際に σ 系を与え, (49)—(53) がそれぞれ, それらの π 系になっていることは, 直接計算により確かめられる. 例外リー代数の次元はその σ 系に属するベクトルの数にその階数を加えたものとして計算され, 上にあげた通りである. 例外リー代数のどの二つも同型でないことはそれらの次元が皆相異なることにより知られる. 階数が n の典型リー代数中最高の次元を有するものは B_n と C_n であって, その次元は $2n^2+n$ となる. 例外リー代数の階数である 2, 4, 6, 7, 8 に対して $2n^2+n$ はそれぞれ 10, 36, 78, 105, 136 である. この数字を例外リー代数の次元と比較して, 例外リー代数と典型リー代数の間に同型関係が存在し得るのは E_6 と B_6, C_6 の間に限ることが判る. しかし一方 $\Sigma(E_6)$ に属するベクトルはすべて同じ長さであるのに $\Sigma(B_6)$ 及び $\Sigma(C_6)$ は 2 種類の長さのベクトルを含むから, E_6 と B_6 または C_6 は同型ではあり得ない.

これで G) は証明された. 唯(44)—(48) をそのルート系とするリー代数の存在は証明しなかった.

例 109. 五つの例外リー代数の存在を証明する方法を示しておこう. しかしこれを実際に検証するには相当の計算を必要とする.

Σ' を分解しない σ 系とする(B)参照). Σ' に適当に相似変換を施して得られるベクトルの集合 Σ は, それに含まれる一つのベクトル β' が §63 の(2)式において $k=1$ とした関係を満足する. このとき Σ に属する任意のベクトルは §63 の式で $k=1$ とした関係をみたす. このようにして得られた Σ に対して, 定理 106 の証明でしたように, すべての実数 $N_{\alpha,\beta}$ を一意的に決定することができる. そこで後はこのようにして定められた $N_{\alpha,\beta}$ が §63 の関係式(8), (9)をみたすことを示せばよい. これができれば, §63 の(18)—(20)によって交換子積を定義すれば, Σ をルート系とするリー代数が得られる.

特にこの方法を σ 系 (44)—(48) に適用すれば五つの例外リー代数の存在が

証明される.

例 110. σ 系を定義する条件(B)参照)の内 b) はそれをみたすかどうかを検証するのが比較的困難である. そこで B) に与えた条件 a), b) を全体として同値な弱い形の条件 a′), b′) に改めて見よう.

新しい条件 b′) に幾何学的な意味をつけるために, 次のことを注意しておく.

α を Euclid ベクトル空間 S における 0 でない一つのベクトルとするとき, α により S を S の上へ写す写像

$$x \longrightarrow x - \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \tag{54}$$

が定義される. 容易に判るように変換(54)は超平面 $(\alpha, x) = 0$ に関する S の対称変換(reflection)である.

さて一つの Euclid ベクトル空間に属する 0 でないベクトルの集合 Γ が B) の条件 a), b) をみたすことは, 次の条件 a′), b′) をみたすことと同値であることを証明しよう. a′) $\lambda \in \Gamma$ ならば $2\lambda \notin \Gamma$, b′) $\lambda \in \Gamma$, $\mu \in \Gamma$ ならば $2(\lambda, \mu)/(\lambda, \lambda)$ は整数で

$$\mu - \frac{2(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)}\lambda \in \Gamma \tag{55}$$

である. 即ち Γ は, 任意の $\lambda \in \Gamma$ に対する超平面 $(\lambda, x) = 0$ に関する対称変換で不変である.

b′) において $\lambda = \mu = \alpha$ とすれば

$$\alpha \in \Gamma \text{ ならば } -\alpha \in \Gamma \tag{56}$$

が得られる. そこで a′), b′) が成立てば a) が成立つことを示すには, $\alpha \in \Gamma$, $r\alpha \in \Gamma$ (r はある実数) ならば $|r| = 1$ であることを示せばよい. 必要ならば α と $r\alpha$ をとり換えればよいから, $|r| \geqq 1$ としてよい. 条件 b′) によって, $2(\alpha, r\alpha)/(r\alpha, r\alpha) = \dfrac{2}{r}$ が整数だから $|r|$ は 1 または 2 でなければならぬ. 所が(56)から $|r|\alpha \in \Gamma$ だから, 条件 a′) により $|r| = 2$ ではあり得ない. 従って $r = \pm 1$ であることが証明された.

次に α 及び β を Γ に属する平行でない二つのベクトルとしよう. いま

$$p = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}, \quad q = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \tag{57}$$

とおき，

$$p>0 \text{ ならば } \beta - j\alpha \in \Gamma \ (j = 1, 2, \cdots, p) \tag{58}$$

であることを証明しよう．それができれば，$p<0$ ならば α を $-\alpha$ で置き換えて条件(58)を適用することにより

$$p<0 \text{ ならば } \beta + j\alpha \in \Gamma \ (j = 1, 2, \cdots, |p|) \tag{59}$$

も成立つ．そこで(58)を証明しよう．まず条件 b′)から

$$\beta - p\alpha \in \Gamma \tag{60}$$

である．$p = 1$ ならば条件(58)は(60)と一致するから成立つことが既に証明された．$p>1$ のときは A)で述べたように

$$p = 2, q = 1 \ ; \ \ p = 3, q = 1 \tag{61}$$

の二つの場合だけが可能である．$p = 2$ の場合には (55) 式で $\lambda = \beta, \mu = \alpha$ とすれば

$$\alpha - \beta \in \Gamma \quad (p \geqq 2 \text{ のとき}) \tag{62}$$

であるから(56)により

$$\beta - \alpha \in \Gamma \quad (p \geqq 2 \text{ のとき}) \tag{63}$$

となる．$p = 3$ の場合には(55)式において $\lambda = \alpha, \mu = \beta - \alpha$ とすれば

$$\beta - 2\alpha \in \Gamma \quad (p = 3 \text{ のとき}) \tag{64}$$

が得られる．(60)，(63)，(64)を合わせると，(58)が証明されたことになる．

次に a′)，b′)から条件 b)を導こう．(57)の記号を使えば

$$\frac{2(\beta - j\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = p - 2j \tag{65}$$

である．いま $\beta - l\alpha \in \Gamma, \beta - (l + 1)\alpha \notin \Gamma$ だから，(58)から

$$p - 2l \leqq 0 \tag{66}$$

であり，従って(59)から

$$\beta - l\alpha + j\alpha \in \Gamma ; \ j = 1, \cdots, 2l - p,$$

となる．故に

$$m \geqq l - p \tag{67}$$

が成立つ．更に $\beta + m\alpha \in \Gamma, \beta + (m + 1)\alpha \notin \Gamma$ だから，同様の考察により，

$$p+2m\geqq 0$$

となるから

$$\beta+m\alpha-j\alpha\in\Gamma;\ j=1,\cdots,p+2m,$$

であり，従って

$$l\geqq m+p \tag{68}$$

である．(67) と (68) を比較して $l=m+p$，即ち $p=l-m$ が得られる．これで b) の成立つことが示された．

逆に条件 a)，b) から a′)，b′) が導かれることは直ちに知られる[1]．

訳註 1)　a), b) をみたす Γ において，任意の $\lambda,\mu\in\Gamma$ に対し，必ず条件 b) の l, m が存在すること，即ちいくらでも大きな絶対値を持つ j に対し $\lambda-j\mu\in\Gamma$ となることがない (実は $0\leqq l\leqq 3$, $0\leqq m\leqq 3$ である) ことが a), b) から直ちに証明される．このことから任意の $\lambda,\mu\in\Gamma'$ に対し $2(\lambda,\mu)/(\mu,\mu)$ が b) により整数となる．

文　献

〔1〕 I. Ado, On the representations of finite dimensional continuous groups by means of linear transformations (in Russian), Izvestia F. M. O. Kazan vol. 7(1934-35) pp. 3-43.

〔2〕 P. S. Alexandroff, On the concept of space in topology (in Russian), Uspehi Mat. Nauk vol. 2, No. 1(1947) pp. 5-57.

〔3〕 P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, Springer, Berlin, 1936.

〔4〕 G. Birkhoff, Lie groups simply isomorphic with no linear group. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 42(1936) pp. 883-888.

〔5〕 S. Bochner and J. von Neumann, Almost periodic functions in groups II, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 37(1935) pp. 21-50.

〔6〕 E. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse, Paris, (1894).

〔7〕 E. Cartan, Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne, J. Math. Pures et appl. t. 8(1929) pp. 1-33.

〔8〕 E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs, Mem. Sci. Math. fasc. XLII (1930).

〔9〕 E. B. Dynkin, The structure of semi-simple Lie algebras, Amer. Math. Soc. Translations No. 17(1950).

〔10〕 F. Gantmacher, On the classification of real simple Lie groups, Mat. Sbornik t. 5(1939) pp. 217-250.

〔11〕 A. M. Gleason, Groups without small subgroups, Ann. of Math. vol. 56 (1952) pp. 193-212.

〔12〕 A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math. vol. 34(1933) pp. 147-169.

〔13〕 F. Hausdorff, Mengenlehre, Göschens Lehrbücherrei, I Gr. Bd. 7. 2 Aufl. 1927.

〔14〕 E. Kampen, Locally compact abelian groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. vol. 20(1934) pp. 434-436.

〔15〕 E. Kampen, Locally bicompact abelian groups and their character groups, Ann. of Math. vol. 36(1935) pp. 448-436.

〔16〕 E. Kampen, Note on a theorem of Pontrjagin, Amer. J. Math. vol. 58 (1936) pp. 177-180.

〔17〕 W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. I, II, III, IV, Math. Ann. Bd. 31(1888) pp. 252-290, Bd. 33 (1889) pp. 1-48, Bd. 34(1889) pp. 57-122, Bd. 36(1890) pp. 161-189.

〔18〕 A. Kolmogoroff, Zur Begründung der projektiven Geometrie, Ann. of Math. vol. 33(1932) pp. 175-176.

〔19〕 H. J. Kowalsky, Zur topologischen Kennzeichnung von Körpern, Math. Nachrichten Bd. 9(1953) pp. 261-320.

[20] A. G. Kurosh, The theory of groups, Chelsea Publ. Co., New York, 1955.

[21] E. Levi, Sulla struttura dei gruppi finiti e coninui. Atti Accad. Torino, t. 40(1905) pp. 3–17.

[22] S. Lie und F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Teubner, Leibzig.

[23] A. I. Malzev, On local and global topological groups, Doklady Akad. Nauk SSSR t. 32(1941) pp. 606–608.

[24] A. I. Malzev, On simply connectedness of normal subgroups of a Lie group(in Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR t. 34(1942) pp. 12–15.

[25] A. I. Malzev, О линейых связных, локально замкнутых группах. ДАН. Т. 40 No. 3 (1942) pp. 108–110.

[26] A. Markoff, Über endlich-dimensionale Vektorräume, Ann. of Math. vol. 36(1935) pp. 464–506.

[27] A. Markoff, On free topological groups (in Russian), Izvestiya Akad. Nauk SSSR t. 9(1945) pp. 3–64.

[28] D. Montgomery and L. Zippin, Topological transformation groups I, Ann. of Math. vol. 41(1940) pp. 778–791.

[29] D. Montgomery and L. Zippin, Small subgroups of finite dimensional groups. Ann. of Math. vol. 56(1952) pp. 213–241.

[30] J. von Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math. vol. 34(1933) pp. 170–190.

[31] J. von Neumann, Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Compositio Math. vol. 1(1934) pp. 106–114.

[32] J. von Neumann Almost periodic functions in a group I, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 36(1934) pp. 445–492.

[33] F. Peter und H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. Bd. 97 (1927) pp. 737–755.

[34] L. S. Pontrjagin, Über stetige algebraische Körper, Ann. of Math. vol. 33(1932) pp. 163–174.

[35] L. S. Pontrjagin, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de M. Hilbert, C. R. Paris t. 198(1934) pp. 238–240.

[36] L. S. Pontrjagin, Sur les groupes abeliens continus, C. R. Paris, t. 198(1934) pp. 328–330.

[37] L. S. Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, Ann. of Math. vol. 35(1934) pp. 361–388.

[38] L. S. Pontrjagin, Linear representations of compact topological groups, Mat. Sbornik t. 1(1936) pp. 267–271.

[39] L. S. Pontrjagin, Foundations of combinatorial topology, Graylock Press, Rochester, 1952.

[40] O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg Bd. 4(1925) pp. 15–32.

[41] O. Schreier, Die Verwandschaft stetigen Gruppen im grossen, Abh. Math. Sem. Hamburg Bd. 5(1926) pp. 233–244.

〔42〕 De la vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, Louvain, Paris, 1903.

〔43〕 B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Springer, Berlin, 1947.

〔44〕 B. L. van der Waerden, Die Klassification der einfachen Lieschen Gruppen, Math. Zeitschrift Bd. 37(1933) pp. 446-462.

〔45〕 H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III, Math. Zeitschrift Bd. 23(1924) pp. 271-304, Bd. 24(1925) pp. 328-395.

〔46〕 A. Weil, L'intégrations dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1940.

〔47〕 J. H. C. Whitehead, On the decomposition of an infinitesimal group, Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. 32(1936) pp. 229-237.

各章の引用文献

記　号	〔13〕
第1章	〔20〕, 〔43〕
第2章	〔2〕, 〔3〕, 〔39〕
第3章	〔23〕, 〔26〕, 〔27〕
第4章	〔18〕, 〔19〕, 〔34〕
第5章	〔4〕, 〔5〕, 〔12〕, 〔31〕, 〔32〕, 〔33〕, 〔38〕, 〔46〕
第6章	〔14〕, 〔15〕, 〔20〕, 〔26〕, 〔36〕, 〔37〕, 〔46〕
第7章	〔11〕, 〔29〕, 〔30〕, 〔35〕, 〔36〕
第8章	〔16〕, 〔28〕, 〔35〕
第9章	〔40〕, 〔41〕, 〔45〕
第10章	〔1〕, 〔8〕, 〔21〕, 〔22〕, 〔24〕, 〔25〕, 〔42〕, 〔47〕
第11章	〔6〕, 〔7〕, 〔9〕, 〔10〕, 〔17〕, 〔44〕, 〔45〕

文献追加 (訳者)

〔48〕 安倍亮，位相数学研究，岩波書店，1950.

〔49〕 阿倍英一，単純リー環より構成される単純群について，数学，第9巻(1957) pp. 8–10.

〔50〕 J. F. Adams, Lectures on Lie groups, W. A. Benjamin Inc., New York-Amsterdam, 1967.

〔51〕 W. Ambrose and I. M. Singer, A theorem on holonomy, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 75(1953) pp. 428–443.

〔52〕 S. Araki, On the homology of spinor groups, Memoirs of Faculty of Sci. Kyusyu Univ., Series A vol. 9(1955–1956) pp. 1–36.

〔53〕 R. Arens, Topologies for homeomorphism groups. Amer. J. Math. vol. 68 (1946) pp. 593–610.

〔54〕 V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math. vol. 48(1947) pp. 568–640.

〔55〕 F. A. Berezin and I. M. Gelfand, Some theorems on the spherical functions on the symmetric Riemannian spaces, (in Russian) Trudy Moscow Mat. Ob. t. 5(1956)pp. 311–352.

〔56〕 F. A. Berezin, I. M. Gelfand, M. I. Graev and A. M. Naimark, Representations of groups, Uspehi Mat. Nauk t. 11, No. 6(1956) pp. 13–40.

〔57〕 M. Berger, Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France t. 83 (1955) pp. 279–330.

〔58〕 M. Berger, Les espace symétrique non compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup. t. 74(1957) p. 85–177.

〔59〕 G. Birkhoff, Representability of Lie algebras and Lie groups. Ann. of Math. vol. 38(1937) pp. 526–532.

〔60〕 H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, Springer, Berlin, 1955.

〔61〕 A. Borel, Les fonctions automorphes des plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France, t. 80(1952) pp. 167–182.

〔62〕 A. Borel, Some remarks about transformation groups transitive on spheres and tori, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 55(1949) pp. 580–586.

〔63〕 A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math. vol. 57(1953) pp. 115–207.

〔64〕 A. Borel, Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. vol. 40(1954) pp. 1147–1151.

〔65〕 A. Borel, Sur l'homologie et cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. Math. vol. 76(1954) pp. 273–342.

〔66〕 A. Borel, Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 61(1955) pp. 397–432.

〔67〕 A. Borel, Linear algebraic groups, Benjamin, New York, 1969.

[68] A. Borel, Sur la torsion des groupes de Lie, J. Math. Pures Appl. t. 39 (1956) pp. 127-139.
[69] A. Borel and C. Chevalley, The Betti numbers of the exceptional groups, Memoirs of the Amer. Math. Soc. No. 14 (1955) pp. 1-9.
[70] A. Borel and F. Hirzebruch, On characteristic classes of homogeneous spaces, I, II, Amer. J. Math. vol. 80 (1958) 458-538, vol. 81 (1951) 315-380.
[71] A. Borel and G. D. Mostow, On semi-simple automorphisms of Lie algebras, Ann. of Math. vol. 61 (1955) pp. 389-405.
[72] A. Borel et J. Siebenthal, Les sous-groupes fermés connexes de rang maximum des groupes de Lie clos, Comm. Math. Helv. vol. 23 (1949-1950) pp. 200-221.
[73] A. Borel et J. P. Serre, Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts, Comm. Math. Helv. vol. 27 (1953) pp. 128-139.
[74] A. Borel et J. P. Serre, Groupes de Lie et puissences réduites de Steenrod, Amer. J. Math. vol. 75 (1953) pp. 409-448.
[75] A. Borel et A. Weil, Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts, Séminaire Bourbaki (1954).
[76] R. Bott, An application of Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France t. 84 (1956) pp. 251-281.
[77] R. Bott, Homogeneous vector bundles, Ann. of Math. vol. 66 (1957) pp. 203-248.
[78] R. Bott, The stable homotopy groups of the classical groups, Ann. Math. vol. 70 (1959) pp. 313-337.
[79] R. Bott and H. Samelson, Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math. vol. 80 (1958) pp. 964-1029.
[80] N. Bourbaki, Topologie générale, Herman, Paris.
[81] N. Bourbaki, Théorie des ensembles, Actualité sci. ind. 1212, 1243 (1956).
[82] F. Bruhat, Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France t. 84 (1956) pp. 97-205.
[83] E. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. France t. 41 (1913) pp. 53-96.
[84] E. Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, Ann. Éc. Norm. t. 13 (1914) pp. 263-355.
[85] E. Cartan, Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, J. Math. pures et appl. t. 10 (1914) pp. 149-186.
[86] E. Cartan, La géométrie des groupes de transformations, J. Math. pure et appl. t. 6 (1927) pp. 1-119.
[87] E. Cartan, La géométrie des groupes simples, Annali di Mat., t. 4 (1927) pp. 209-256.
[88] E. Cartan, Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, Ann. Éc. Norm. t. 44 (1927) pp. 345-467.
[89] E. Cartan, Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Ren. Circ, mat. Palermo t. 53

(1929) pp. 217-252.
[90] E. Cartan, Sur les invariants intégraux de certaines espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces Ann. Sc. pol. Math. t. 8 (1929) pp. 181-225.
[91] E. Cartan, Les espaces riemanniens symétriques, Verh. Int. Math. Kongress, Zürich, 1932, Bd. I, pp. 152-161.
[92] E. Cartan, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n-variables complexes, Abh. Math. Sem. Hamburg Bd. 11 (1935) pp. 116-162.
[93] E. Cartan, La topologie des espace représentifs des groupes de Lie, Exposés de géométrie VIII (1936) Hermann. Paris.
[94] E. Cartan, Les représentations linéaires des groupes de Lie, J. Math. pure et appl. t. 17 (1938) pp. 1-12.
[95] H. Cartan, Sur les groupes de transformations analytiques. Actualité sci. ind. 198 (1935) Hermann, Paris.
[96] H. Cartan, Séminaire, Espace fibrés et homotopie, 1949-1950.
[97] H. Cartan, Notions d'algèbres différentielles, application aux groupes de Lie et aux variétés ou opère un groupe de Lie, Colloque de Topologie, (Espace fibrés) Bruxelles, (1950) pp. 15-27.
[98] H. Cartan, La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950) pp. 57-71.
[99] H. Cartan et R. Godement, Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abeliennes localmant compacts, Ann. Éc. Norm. t. 64 (1947) pp. 79-99.
[100] P. Cartier, Dualité de Tannaka des groupes et des algèbres de Lie, C. R. Paris, t. 242 (1956) pp. 322-325.
[101] C. Chevalley, On the topological structure of solvable groups, Ann. of Math. vol. 42 (1941) pp. 668-675.
[102] C. Chevalley, A new kind of relationship between matrices, Amer. J. Math. vol. 65 (1943) pp. 521-531.
[103] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946.
[104] C. Chevalley, Algebraic Lie algebras, Ann. of Math. vol. 48 (1947) pp. 91-100.
[105] C. Chevalley, The Betti numbers of the exceptional Lie groups, Proc. Int. Congress of Math. Cambridge (1950) vol. 2, pp. 21-24.
[106] C. Chevalley, Sur le groupe exceptional (E_6), C. R. Paris t. 232 (1951) pp. 1991-1993.
[107] C. Chevalley, Sur une variété liée à l'étude du groupe exceptional (E_6), C. R. Paris. t. 232 (1951) pp. 2168-2170.
[108] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, t. II et t. III, Hermann, Paris (1951, 55).
[109] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J. vol. 7 (1955) pp. 14-66.
[110] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. vol. 77 (1955) pp. 778-782.

〔111〕 C. Chevalley and S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 63 (1948) pp. 85-124.

〔112〕 C. Chevalley and R. D. Schafer, The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. vol. 36 (1950) pp. 137-141.

〔113〕 P. M. Cohn, Lie groups, Cambridge Tracts No. 46 (1957).

〔114〕 A. J. Coleman, The Betti numbers of the simple Lie groups, Canadian J. Math. vol. 10 (1958) pp. 349-356.

〔115〕 J. B. Dieudonné, On topological groups of homeomorphisms, Amer. J. Matha. vol. 70 (1948) pp. 658-680.

〔116〕 J. Dixmier, Sur les representations unitaires des groupes algebriques, Ann. de l'Inst. Fourier, t. 7 (1957) pp. 315-328.

〔117〕 E. B. Dynkin, Estimation of the coefficients of Campbell-Hausdorff formula (in Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR t. 57 (1947) pp. 323-326.

〔118〕 E. B. Dynkin, Homologies of compact Lie groupes (in Russian), Uspehi Mat. Nauk t. 8 No. 5 (1953) pp. 72-120.

〔119〕 E. B. Dynkin, Homological characterization of homomorphisms of compact Lie groups (in Russian), Mat. Sbornik t. 35 (1954) pp. 129-173.

〔120〕 E. B. Dynkin, Maximal subgroups of the classical groups, Amer. Math. Soc. Translations, series 2 vol. 6 (1957) pp. 245-378.

〔121〕 E. B. Dynkin Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, Amer. Math. Soc. Translations, series 2, vol. 6 (1957) pp. 111-244.

〔122〕 E. B. Dynkin and A. L. Oniščik, Compact Lie groups in the large (in Russian), Uspehi Mat. Nauk t. 10 No. 4 (1955) pp. 3-74.

〔123〕 C. Ehresmann, Sur la topologie de certains espaces homogènes, Ann. of Math. vol. 35 (1934) pp. 396-443.

〔124〕 C. Ehresmann, Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, Colloque Géométrie diff. Strasbourg (1953).

〔125〕 H. Freudenthal, Topologischen Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen, Ann. of Math. vol. 37 (1936) pp. 57-77.

〔126〕 H. Freudenthal, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. (mimeographed note), Utrecht (1951).

〔127〕 H. Freudenthal, Zur Berechnung der Charaktere der halb-einfachen Lieschen Gruppen, I, II, Indagationes Math. vol. 16 (1954) pp. 369-376, 487-491.

〔128〕 H. Freudenthal, Zur Eben Oktavengeometrie, Indagationes Math. vol. 15 (1953).

〔129〕 H. Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I—VII, Indagationes Math. vol. 16 (1954) pp. 218-230, 363-368, vol. 17 (1955) pp. 151-157, 277-285, vol. 62 (1959).

〔130〕 H. Freudenthal, Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems, Math. Zeitschrift Bd. 63 (1955-56) pp. 374-405.

〔131〕 I. M. Gelfand, Spherical functions on symmetric Riemannian spaces (in Russian), Doklady Akad. Nauk, SSSR vol. 70 (1950) pp. 5-8.

〔132〕 I. M. Gelfand, Some aspects of functional analysis and algebra, Proc. Int.

Congress of Math., Amsterdam (1954) vol. I, pp. 253-276.
[133] I. M. Gelfand and S. U. Fomin, Geodesic flows on manifold of constant negative curvature, Amer. Math. Soc. Translations series 2, vol. 1(1956) pp. 49-66.
[134] I. M. Gelfand and M. I. Graev, Unitary representations of the real unimodular group(principal non-degenerate series), Amer. Math. Soc. Translations, series 2, vol. 2, pp. 147-205.
[135] I. M. Gelfand and M. A. Naimark, Unitary representations of Lorentz group (in Russian), Izvestia Akad. Nauk SSSR vol. 11(1947) pp. 411-504.
[136] I. M. Gelfand und M. A. Neumark, Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen, Akademie Verlag, Berlin, 1957.
[137] I. M. Gelfand and D. A. Raikov, Irreducible unitary representations of locally compact groups(in Russian), Mat. Sbornik t. 13(1943) pp. 301-316.
[138] A. M. Gleason, The structure of locally compact groups, Duke Math. J. vol. 18(1951) pp. 85-105.
[139] A. M. Gleason and R. S. Palais, On a class of transformation groups, Amer. J. Math. vol. 79(1957) pp. 631-648.
[140] B. M. Glyshkov, Structure of locally compact groups and the fifth problem of Hilbert, Uspehi Mat. Nauk t. 12, No. 2(1957) pp. 3-41.
[141] R. Godement, Les fonctions de types positives et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 63(1948) pp. 1-84.
[142] R. Godement, Sur la théorie des représentations unitaires, Ann. of Math. vol. 53(1951) pp. 68-124.
[143] R. Godement, A theory of spherical functions I, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 73(1952) pp. 496-556.
[144] 後藤守邦, Lie 群の同型表現について, 数学, 第2巻(1949) pp. 1-16.
[145] M. Goto, On algebraic homogeneous spaces, Amer. J. Math. vol. 76(1954) pp. 811-818.
[146] M. Goto and S. Sasaki, Some theorems on holonomy groups of riemannian manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 80(1955) pp. 148-158.
[147] M. I. Graev, Unitary representations of real simple Lie groups (in Russian), Trudy Moscou-Mat. Obšč. t. 7(1958) pp. 333-389.
[148] P. R. Halmos, Measure theory, Van Nostrand, New York, 1950.
[149] J. Hano, On Kaehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups, Amer. J. Math. vol. 79(1957) pp. 885-900.
[150] Harish-Chandra, Faithful representations of Lie algebras, Ann. of Math. vol. 50(1949) pp. 68-79.
[151] Harish-Chandra, On representations of Lie algebras, Ann. of Math. vol. 50(1949) pp. 900-915.
[152] Harish-Chandra, Lie algebras and the Tannaka duality theorem, Ann. of Math. vol. 51(1950) pp. 299-330.
[153] Harish-Chandra, On some applications of universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 70(1951)

pp. 28-96.
〔154〕 Harish-Chandra, Representations of a semisimple Lie group on a Banach space I, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 75(1953) pp. 185-243.
〔155〕 Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups II, III, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 76(1954) pp. 26-65, 234-253.
〔156〕 Harish-Chandra, The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 76(1954) pp. 485-528.
〔157〕 Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups IV, V, VI, Amer. J. Math. vol. 77(1955) pp. 743-777, vol. 78(1956) pp. 1-41, 564-628.
〔158〕 Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 83(1956) pp. 98-163.
〔159〕 Harish-Chandra, Differential operator on a semisimple Lie algebra, Amer. J. Math. vol. 79(1957) pp. 87-120.
〔160〕 Harish-Chandra, Spherical function on a semisimple Lie group, I, II, Amer. J. Math. vol. 80(1958) pp. 241-310, 553-613.
〔161〕 Harish-Chandra, A formula for semisimple Lie groups, Amer. J. Math. vol. 79(1957) pp. 733-760.
〔162〕 Harish-Chandra, Fourier transforms on a semisimple Lie algebra I, II, Amer. J. Math. vol. 79(1957) pp. 193-257, 653-686.
〔163〕 H. Hasse, Zahlentheorie, Akademie Verlag, Berlin, 1949.
〔164〕 G. Hochschild, Lie algebras and differentiation in rings of power series, Amer. J. Math. vol. 72(1950) pp. 58-80.
〔165〕 G. Hochshild and G. D. Mostow, Extensions of Lie groups and Lie algebras I, Amer. J. Math. vol. 79(1957) pp. 924-942.
〔166〕 E. Hopf, Ergodentheorie, Ergebniss Math. Bd. 5, Heft 2(1937).
〔167〕 H. Hopf, Über Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Veralgemeinerungen, Ann. of Math. vol. 42(1941) pp. 22-52.
〔168〕 H. Hopf, Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen, Comm. Math. Helv. vol. 13(1940-41) pp. 119-143.
〔169〕 H. Hopf, Maximale Toroide und singuläre Elemente in geschlossenen Lieschen Gruppen, Comm. Math. Helv. vol. 15(1942-43) pp. 59-70.
〔170〕 H. Hopf und H. Samelson, Ein Satz über Wirkungsräume geschlossene Liesche Gruppen, Comm. Math. Helv. vol. 13(1941) pp. 240-251.
〔171〕 G. A. Hunt, A theorem of Elie Cartan, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 7 (1956) pp. 307-308.
〔172〕 W. Hurewicz and H. Wallmann, Dimension theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
〔173〕 犬井鉄郎－柳川禎章，群表現と原子及び分子，裳華房，東京，1948.
〔174〕 伊勢幹夫，対称空間の理論 I, II, 数学第 11 巻(1959) pp. 76-93, 13 巻(1961) 88-107.
〔175〕 伊勢幹夫－杉浦光夫－斎藤正彦，対称リーマン多様体の分類について，数学振興会夏期ゼミナール報告，I(1956) pp. 61-92.
〔176〕 S. Itô, Unitary representations of some linear groups I, II, Nagoya Math. J. vol. 4(1952) pp. 1-13, vol. 5(1953) pp. 79-96.

〔177〕 伊藤清三，コンパクト群及び可換群の既約ユニタリ表現について，数学，第5巻 (1954) pp. 226-228.

〔178〕 N. Iwahori, On some matrix operators, J. Math. Soc. Japan vol. 6(1954) pp. 76-105.

〔179〕 岩堀長慶，対称リーマン空間の不動点定理，数学振興会夏期ゼミナール報告，I (1956) pp. 40-60.

〔180〕 岩堀長慶，リー群論，岩波講座 現代応用数学，第 2, 9 巻(1957).

〔181〕 岩堀長慶 - 佐武一郎，Lie 環の Cartan 分解について，数学，第2巻 (1950) pp. 234-238.

〔182〕 H. Iwamoto, On integral invariants and Betti numbers of symmetric Riemannian spaces I, II, J. Math. Soc. Japan vol. 1(1949) pp. 91-110, 235-243.

〔183〕 K. Iwasawa, On the representations of Lie algebras, Jap. J. Math. vol. 19(1948) pp. 405-426.

〔184〕 K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math. vol. 50(1949) pp. 507-558.

〔185〕 K. Iwasawa, Topological groups with invariant compact neibourfood of the identity, Ann. of Math. vol. 54(1951) pp. 345-348.

〔186〕 彌永昌吉 - 杉浦光夫，応用数学者のための代数学，岩波書店，1960.

〔187〕 N. Jacobson, Totally disconnected locally compact rings, Amer. J. Math. vol. 58(1936) pp. 433-449.

〔188〕 N. Jacobson, Simple Lie algebras over a field of characteristic zero, Duke Math. J. vol. 4(1938) pp. 534-551.

〔189〕 N. Jacobson, Exceptional Lie algebras, Marcel Dekker, New York, 1971.

〔190〕 N. Jacobson, Completely reducible Lie algebras of linear transformations, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 2(1951) pp. 105-113.

〔191〕 河田敬義，Lie 群の不変微分式について，数学，第2巻(1949) pp. 33-38.

〔192〕 河田敬義，微分式論，河出書房，東京，1951.

〔193〕 S. Kakutani Über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Japan, vol. 12(1936) pp. 82-84.

〔194〕 S. Kakutani, und K. Kodaira, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppen, Proc. Imp. Acad. Japan, vol. 20(1944) pp. 444-450.

〔195〕 F. E. Karpelevich, Simple subalgebras of real Lie algebras(in Russian), Trudy Moscow Mat. O b. t. 4(1955) pp. 3-112.

〔196〕 S. Kobayashi, Le groupe de transformations qui laissent invariant le parallelisme, Colloque de topologie, Strasbourg (1954)

〔197〕 S. Kobayashi-K. Nomizu, Foundations of differential geometry, I, II, Interscience, N. Y. 1963, 1969.

〔198〕 小平邦彦，単純リー群について，I, II, 科学. vol. 16(1946) pp. 51-54, 112-116.

〔199〕 E. R. Kolchin, Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous differential equations, Ann. of Math. vol. 49 (1948) pp. 1-42.

〔200〕 B. Kostant, Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of

a Riesmannian manifold, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 80 (1955) pp. 528-542.

[201] B. Kostant, Conjugacy of real Cartan subalgebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. vol. 41(1955) pp. 967-970.

[202] B. Kostant, The Principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, Amer. J. Math. vol. 81(1959) pp. 973-1032.

[203] B. Kostant, Lie algebra cohomology and the goneralized Borel–Weil theorem, Ann. o Math. vol. 74(1961) pp. 329–387.

[204] B. Kostant, On holonomy and homogeneous spaces, Nagoya Math. J. vol. 12(1957) pp. 31-54.

[205] J. L. Koszul, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. France, t. 78(1950) pp. 65-127.

[206] J. L. Koszul, Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression, Colloque de Topologie (Espaces fibrés) Bruxelles (1950) pp. 73-81.

[207] J. L. Koszul, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, Canadian J. Math. vol. 7(1955) pp. 562-576.

[208] M. Kuranishi, On everywhere dense imbedding of free groups in Lie groups, Nagoya Math. J. vol. 2(1951) pp. 63-71.

[209] M. Kurita, On the vectors in homogeneous spaces, Nagoya Math. J. vol. 5(1953) pp. 1-33.

[210] Laporte and Uhlenbeck, Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations, Phys. Review, vol. 37(1931) pp. 1380-1397.

[211] J. Leray, Sur l'homologie des groupes de Lie, éspaces homogènes et des éspaces fibrés principaux, Colloque de topologie (Espace fibrés), Bruxelle (1950) pp. 101-115.

[212] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Edizioni Cremonese, Rome, 1955.

[213] L. H. Loomis, An Introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand, New York, 1953.

[214] W. Maak, Fastperiodische Funktionen, Springer, Berlin, 1950.

[215] G. W. Mackey, Functions on locally compact groups, Bull. Amer. Math Soc. vol. 56(1950) pp. 385-412.

[216] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, II. Ann. of Math. vol. 55(1952) pp. 101-139, vol. 58(1953) pp. 193-221.

[217] G. W. Mackey, Infinite dimensional group representations, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 69(1963) pp. 134–165.

[218] A. I. Malcev, On the theory of the Lie groups in the large, Mat. Sbornik vol. 16(1945) pp. 163-189. Corrections, Mat. Sbornik vol. 19 (1946) pp. 523-524.

[219] A. I. Malcev, On a class of homogeneous spaces, Amer. Math. Soc. Translations no. 42(1951).

[220] Y. Matsushima, On a type of subgroups of compact Lie groups, Nagoya Math. J. vol. 2(1951) pp. 1-15.

〔221〕 Y. Matsushima, On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, Nagoya Math. J. vol. 2(1951) pp. 95–110.

〔222〕 Y. Matsushima, Some remarks of the exceptional simple Lie group F_4, Nagoya Math. J, vol. 4(1952) pp. 83–88.

〔223〕 松島與三, Hermitian Symmetric space について, 数学振興会夏期ゼミナール報告, I (1956) pp. 105–128.

〔224〕 松島與三, リー環論, 現代数学講座, 第3巻, 共立出版, 1956.

〔225〕 Y. Matsushima, Sur les espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie réductif, Nagoya Math. J. vol. 11(1957) pp. 53–60.

〔226〕 Y. Matsushima, Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kaehlérienne, Nagoya Math. J. vol. 11 (1957) pp. 145–150.

〔227〕 松島與三, 均質ケーラー空間について, 科学, vol. 27 (1957) pp. 135–139.

〔228〕 Y. Matsushima and J. Hano, Some studies on kaehlerian homogeneous spaces, Nagoya Math. J. vol. 11 (1957) pp. 77–92.

〔229〕 F. I. Mautner, Unitary representations of locally compact groups I, II, Ann. of Math. vol. 51(1950) pp. 1–25; vol. 52(1950) pp. 528–555.

〔230〕 F. I. Mautner, Geodesic flows on symmetric spaces, Ann. of Math. vol. 65(1957) pp. 416–431.

〔231〕 F. I. Mautner and L. Ehrenpreis, Some properties of Fourier transform on semi-simple Lie group I, II, Ann. of Math. vol. 61 (1955) pp. 406–439; Trans. Amer. Math. Soc. vol. 84(1957) pp. 1–55, III, vol. 90(1959).

〔232〕 C. E. Miller, The topology of rotation groups, Ann. of Math. vol. 57(1953) pp. 95–110.

〔233〕 W. H. Mills and G. B. Selligman, Lie algebra of classical type, J. Math. and Mechanics vol. 6(1957) pp. 519–548.

〔234〕 三村征雄, 位相解析, 現代数学講座, 第12巻, 共立出版, 1957.

〔235〕 D. Montgomery, Simply connected homogeneous spaces, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 1(1950) pp. 467–469.

〔236〕 D. Montgomery and H. Samelson, Transformation groups of spheres, Ann. of Math. vol. 44(1943) pp. 454–470.

〔237〕 D. Montgomery and L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience Publishers Inc., New York, 1955.

〔238〕 森田紀一, 次元論, 岩波書店, 1950.

〔239〕 P. S. Mostert, On a compact Lie group acting on a manifold, Ann. of Math. vol. 65(1957) pp. 447–455.

〔240〕 G. D. Mostow, A new proof of É. Cartan's theorem on the topology of semi-simple groups, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 55(1949) pp. 969–980.

〔241〕 G. D. Mostow, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. of math. vol. 52(1950) pp. 606–635.

〔242〕 G. D. Mostow, On an assertion of Weil, Ann. of Math. vol. 54(1951) pp. 339–344.

〔243〕 G. D. Mostow, Factor spaces of solvable groups, Ann. of Math. vol. 60 (1954) pp. 1–27.

[244] G. D. Mostow, Some new decomposition theorems for semi-simple groups, Memoirs of Amer. Math. Soc. No. 14 (1955) pp. 31-54.
[245] G. D. Mostow, On covariant fiberings of Klein spaces, Amer. J. Math. vol. 77 (1955) pp. 246-277.
[246] G. D. Mostow, Self-adjoint groups, Ann. of Math. vol. 62 (1955) pp. 44-55.
[247] G. D. Mostow, Fully reducible subgroups of algebraic groups, Amer. J. Math. vol. 78 (1956) pp. 200-221.
[248] G. D. Mostow, On the fundamental group of a homogeneous space, Ann. of Math. vol. 66 (1957) pp. 249-255.
[249] G. D. Mostow and G. Hochshild, Representations and representative functions of Lie groups, Ann. of Math. vol. 66 (1957) pp. 495-542.
[250] S. Murakami, On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra, J. Math. Soc. Japan vol. 4 (1952) pp. 103-133; Supplements and corrections vol. 5 (1953) pp. 105-112.
[251] S. Murakami, Algebraic study of fundamental characteristic classes of sphere bundles, Osaka Math. J. vol. 8 (1956) pp. 187-224.
[252] S. B. Myers and N. E. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold, Ann. of Math. vol. 40 (1939) pp. 400-416.
[253] T. Nagano, Homogeneous sphere bundles and the isotropic Riemannian manifolds, Nagoya Math. J. vol. 15 (1959) pp. 29-55.
[254] A. M. Naimark, On the complete description of unitary representations of complex classical groups I, II, III (in Russian), Mat. Sbornik t. 35 (1954) pp. 317-355, t. 37 (1955) pp. 121-140 (III, to appear).
[255] 永田雅宜，Hillert の第14問題について，数学，12巻(1960) pp. 203-209.
[256] 中山正，集合・位相・代数系，至文堂，東京，1949.
[257] A. Nijenhuis, On the holonomy groups of linear connections, Indagationes Math. vol. 15 (1953) pp. 233-249, vol. 116 (1954) pp. 17-25.
[258] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, Ann. of Math. vol. 59 (1954) pp. 531-538.
[259] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math. vol. 76 (1954) pp. 33-65.
[260] K. Nomizu, Studies on Riemannian homogeneous spaces, Nagoya Math. J. vol. 9 (1955) pp. 43-56.
[261] K. Nomizu, Lie groups and differential geometry, Publications of Math. Soc. Japan (1956).
[262] H. Ozeki, Infinitesimal holonomy groups of bundle connections, Nagoya Math. J. vol. 10 (1956) pp. 105-123.
[263] R. S. Palais, A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 22 (1957).
[264] W. Pauli, Ann. Inst. H. Poincaré t. 6 (1936) p. 109.
[265] L. S. Pontrjagin, Homologies in compact Lie groups, Mat. Sbornik t. 6 (1939) pp. 389-422.
[266] D. A. Raikov, Harmonic analysis on commutative groups with Haar

measure and theory of characters (in Russian) , Trudy Inst. Steklov t. 14 (1945) pp. 1–86.

〔267〕 M. E. Rose, Elementary theory of angular momentum, Wiley, New York.

〔268〕 M. Saito, Sousgroupes discrets des groupes resolubles, Ames. J. Math. vol. 83 (1961) pp. 369–392.

〔269〕 M. Saito, Sur certains groupes de Lie résolubles I, II, Sci. Papers, College of Gen. Education, Tokyo Univ. vol. 7 (1957) pp. 1–11, 157–168.

〔270〕 H. Samelson, Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten, Ann. of Math. vol. 42 (1941) pp. 1091–1137.

〔271〕 H. Samelson, A note on Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 52 (1946) pp. 870–873.

〔272〕 H. Samelson, Topology of Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 58 (1952) pp. 2–37.

〔273〕 佐々木重夫，連続群論，東海書房，東京，1951.

〔274〕 I. Satake, On a theorem of E Cartan, J. Math. Soc. Japan vol. 2 (1951) pp. 284–305.

〔275〕 I. Satake, On the representations and compactifications of symmetric Riemannian Spaces, Ann. Math. vol. 71 (1960) pp. 77–110.

〔276〕 佐武一郎，$\mathfrak{p}$-進体上の代数群，数学，12 巻 (1960) pp. 195–202.

〔277〕 A. Sellerg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian Spaces with discontinuous to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. vol. 20 (1956) pp. 47–87.

〔278〕 J. de Siebenthal, Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos, Comm. Math. Helv. vol. 25 (1950) pp. 210–256.

〔279〕 J. de Siebenthal, Sur les groupes de Lie compact non connexes, Comm. Math. Helv. vol. 31 (1956–57) pp. 41–89.

〔280〕 I. M. Singer, Uniformly continuous unitary representations of Lie groups, Ann. of Math. vol. 56 (1952) pp. 242–247.

〔281〕 I. M. Singer, Report on group representations, Report of an international conference on operator algebra and group representations, Publ. 387, Nat. Acad. Sci. and Nat. Research Council, Washington, 1955.

〔282〕 N. Steenrod, The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.

〔283〕 E. Stiefel, Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'schen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen Euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen, Comm. Math. Helv. vol. 14 (1941–42) pp. 350–380.

〔284〕 E. Stiefel, Kristallographische Bestimmung der Charaktere der geschlossenen Lie'schen Gruppen, Comm. Math. Helv. vol. 17 (1944–45) pp. 165–200.

〔285〕 杉浦光夫—山内恭彦，連続群論入門，培風館，東京，1960.

〔286〕 M. Sugiura, On a certain property of Lie algebras, Sci. Papers, College of Gen. Education, Tokyo Univ. vol. 7 (1955) pp. 1–12.

〔287〕 竹之内脩，位相群の正則表現について，数学，第 7 巻 (1955) pp. 1–8.

〔288〕 O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), Math. J. Okayama Univ. vol. 7 (1957) pp. 151-161.

〔289〕 T. Tannaka, Dualität der nicht-kommutativen Gruppen, Tôhoku Math. J. vol. 53 (1938) pp. 1-12.

〔290〕 淡中忠郎，位相群論，岩波書店，1949.

〔291〕 淡中忠郎，双対原理，岩波書店，1951.

〔292〕 J. Tits, Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels E_6 et E_7, Bull. Acad. Roy. Belg. t. 40 (1954) pp. 29-40.

〔293〕 J. Tits, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, Mem. Acad. Roy. Belg. t. 29 (1955).

〔294〕 J. Tits, Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique, Bull. Soc. Math. Belg. t. 8 (1956) pp. 48-81.

〔295〕 S. Tôgô, On splittable linear Lie algebras, J. Sci. Hiroshima Univ. vol. 18 (1955) pp. 289-306.

〔296〕 M. L. Tomber, Lie algebras of type F, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 4 (1953) pp. 759-768.

〔267〕 梅沢博臣，素粒子論，みすず書房，1953.

〔298〕 H. Umezawa, Quantum field theory, North-Holand publ. Co. Amsterdam-Groningen, 1956.

〔299〕 B. L. van der Waerden, Spinor Analysis, Nachrichten, Göttingen (1929) pp. 100-109.

〔300〕 B. L. van der Waerden, Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.

〔301〕 H. C. Wang, Homogeneous spaces with non-vanishing Euler characteristic, Ann. of Math. vol. 50 (1949) pp. 915-953.

〔302〕 H. C. Wang, Two-point homogeneous spaces, Ann. of Math. vol. 55 (1952) pp. 177-191.

〔303〕 H. C. Wang, Closed manifolds with homogeneous complex structure, Amer. J. Math. vol. 76 (1954) pp. 1-32.

〔304〕 H. C. Wang Discrete subgroups of solvable Lie groups I, Ann. of Math. vol. 64 (1956) pp. 1-19.

〔305〕 A. Weil, Algebraic groups of transformations, Amer. J. Math. vol. 77 (1955) pp. 355-391.

〔306〕 A. Weil, On algebraic transformation groups and homogeneous spaces, Amer. J. Math. vol. 77 (1955) pp. 493-512.

〔307〕 H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin, 1923.

〔308〕 H. Weyl, 群論と量子力学（山内恭彦訳），裳華房，東京，1933.

〔309〕 H. Weyl, Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math. vol. 35 (1934) pp. 486-499.

〔310〕 H. Weyl, The structure and representations of continuous groups I, II, Mimeographed note, Institute for Advanced Study (1933-34, 1934-35).

〔311〕 H. Weyl, The classical groups, Princeton Univ. Press, 1939.

〔312〕 F. B. Wright, Topological abelian groups, Amer. J. Math. vol. 79 (1957) pp. 477-496.

〔313〕 H. Yamabe, On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Osaka Math. J. vol. 2(1950) pp. 13-14.

〔314〕 H. Yamabe, On a conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. of Math. vol. 58(1953) pp. 48-54.

〔315〕 H. Yamabe, A generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math. vol. 58(1953) pp. 351-365.

〔316〕 山内恭彦，回転群とその表現，岩波書店，1957.

〔317〕 山内恭彦－堀江久，回転群及び対称群の応用，岩波講座 現代応用数学，第11巻 (1958).

〔318〕 I. Yokota, On the homology of classical Lie groups, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. vol. 8(1957) pp. 93-120.

〔319〕 吉田耕作，位相解析，岩波書店，1951.

〔320〕 H. Yoshizawa, Unitary representations of locally compact groups, Osaka Math. J. vol. 1(1949) pp. 81-89.

〔321〕 H. Yoshizawa, A proof of Plancherel theorem, Proc. Japan Acad. vol. 30(1954) pp. 276-281.

〔322〕 湯川秀樹－小林稔；素粒子論，共立出版，1951.

〔323〕 Séminaire Sophus Lie, École Norm. sup., Paris, 1955.

〔324〕 F. A. Berezin, Laplace operators on semisimple Lie groups (in Russian), Trudy Moscou Mat. Obšč. t. 6(1958) pp. 371-463.

〔325〕 R. Bott, Loop spaces of a Lie group, Michigan Math. J. vol. 5(1958) pp. 35-61.

〔326〕 J. Dixmier, Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents, I-V, Amer. J. Math. vol. 81(1959) 160-170, Bull. Soc. Math. France t. 85(1957) 325-388, t. 87 (1959) 321-344, Canad. J. Math. vol. 10 (1958) 321-348, vol. 11(1959) 321-344.

〔327〕 I. M. Gelfand and M. I. Graev, Geometry of homogeneous spaces, representations of groups on homogeneous spaces and the problems of integral geometry related to them, Trudy Moscou Mat. Obšč. t. 8(1959) 321-390.

〔328〕 Y. Matsushima, Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, Nagoya Math. J. vol. 16(1960) 205-218.

〔329〕 Y. Matsushima et A. Morimoto, Sur certaines espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. Math. France.

〔330〕 M. A. Naimark, Linear representations of the Lorentz group (in Russian) Moscou, 1958.

〔331〕 I. I. Piatetskii-Shapiro, On a problem of E. Cartan (in Russian), Doklady Akad. Nank SSSR vol. 124(1959) pp. 272-273.

〔332〕 Séminaire C. Chevalley, Classification des groupes de Lie algébriques, Ecole Norm, Sup., Paris, 1958.

〔333〕 M. Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, vol. 11(1959) 374-434.

〔334〕 N. Ya. Vilenkin, Bessel functions and representations of the group of Euclidean motions (in Russian), Uspehi Mat. Nauk. t. 11(1956) No. 3, pp. 67-112.

〔335〕 Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. of symposia in pure math. vol. IX, Amer. Math. Soc. 1966.

〔336〕 A. Borel, Représentations de groupes localement compacts, Lecture note in Math. vol. 276, Springer, 1972.

〔337〕 A. Borel-J. Tits, Groupes réductifs, I. H. E. S., Publ. de Math. n° 27 (1965), pp. 55–151.

〔338〕 W. M. Boothby-G. L. Weiss (ed.), Symmetric spaces, Marcel Dekker, New York, 1972.

〔339〕 N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie. ch. 1 (1960), ch. 2, 3 (1972), ch. 4, 5, 6 (1968), 邦訳ブルバキ数学原論リー群とリー環, 1, 2, 3 (杉浦光夫訳), 東京図書, 1968, 1973, 1970.

〔340〕 H. Dym-H. P. McKean, Fourier series and integrals, Academic Press, New York-London, 1972.

〔341〕 J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthiers-Villars, Paris, 1964.

〔342〕 H. Freudenthal-H. de Vries, Linear Lie groups, Academic press, New York-London, 1969.

〔343〕 I. M. Gelfand–M. I. Graev–N. A. Vilenkin, Generalized functions, vol. 5, Integral geometry and representation theory, Academic Press, N. Y. 1966.

〔344〕 I. M. Gelfand–M. I. Graev–I. I. Pjateckii-Šapiro, Representation theory and automorphic functions, W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1969.

〔345〕 Harish-Chandra, Discrete series for semi-simple Lie groups, I, II, Acta Math. vol. 113 (1965) pp. 241–318. vol. 116 (1966) pp. 1–111.

〔346〕 Harish-Chandra, Automorphic forms on semisimple Lie groups. Lecture note in Math. vol. 62, Springer, 1968.

〔347〕 Harish-Chandra–G. van Dijk, Harmonic analysis on reductive p-adic groups, Lecture note in Math. vol. 162, Springer, 1970.

〔348〕 M. Hausner-J. T. Schwartz, Lie groups; Lie algebras, Gordon and Breach, New York, 1968.

〔349〕 S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1962.

〔350〕 S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances of Math. vol. 5 (1970) pp. 1–154.

〔351〕 E. Hewitt-K. A. Ross, Abstract harmonic analysis, I, II, Springer, 1963, 1970.

〔352〕 G. Hochshild, The structure of Lie groups, Holden-Day, San Francisco, 1965, 邦訳リー群の構造 (橋本浩治訳), 吉岡書店, 1972.

〔353〕 华罗庚, 多复变数函数论中的典型域的調和分析, 科学出版社, 北京, 1958, 英訳 Hua, L. K., Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains, Translations of Math. Monographs, vol. 6, Amer. Math. Soc., 1963.

〔354〕 N. Jacobson, Lie algebras, Interscience, N. Y., 1962.

〔355〕 H. Jacquet, Automorphic forms on $GL(2)$, II, Lecture note in Math., vol.

278, Springer, 1972.

[356] H. Jacquet-R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture note in Math. vol. 114, Springer, 1970.

[357] I. Kaplansky, Lie algebras and locally compact groups, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1971.

[358] O. Loos, Symmetric spaces, I, II, Benjamin, N. Y., 1969.

[359] 松島與三, 多様体入門, 裳華房, 1965.

[360] 村上信吾, 連続群論の基礎, 朝倉書店, 1973.

[361] S. Murakami, On automorphisms of Siegel domain, Lecture note in Math. vol. 286, Springer, 1972.

[362] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro, The geometry of classical domains, (in Russian), 邦訳 典型領域の幾何学と保型函数の理論(杉浦, 一松, 折原訳), 東大数学教室セミナリー・ノート, 1, 2, 1962.

[363] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience, N. Y., 1960.

[364] 佐武一郎, Classification theory of algebraic groups, Marcel Dekker, New York, 1971.

[365] R. D. Schafer, An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, New York, 1966.

[366] J. P. Serre, Algèbres de Lie semisimples complexes, Benjamin, New York, 1966.

[367] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, (Mimeographed note), Math. Inst., Univ. Bonn, 1965.

[368] J. Tits, Tabellen zu den einfachen Lie gruppen und ihren Darstellungen, Lecture note in Math. vol. 40, Springer, 1967.

[369] ユニタリ表現特集号, 数学, 19巻4号(1968).

[370] N. Ja, Vilenkin, Special functions and the theory of group representations, Translations of Math. Monographs, vol. 22, Amer. Math. Soc., 1968.

[371] N. R. Wallach, Harmonic analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, New York, 1973.

[372] 万哲先(Wang ZRe-Xian), 季代数, 科学出版社, 北京, 1964.

[373] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups, I, II, Springer, 1972.

[374] 横田一郎, 群と表現, 裳華房, 1973.

[375] Conference on harmonic analysis, Lecture note in Math. vol. 266, Springer, 1972.

[376] I. MacDonald, Spherical functions on a group of p-adic type, University of Madras, Madras, 1971.

[377] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

[378] Harmonic analysis on homogeneous spaces, Proc. of Symposia in pure math. vol. XXVI, Amer. Math. Soc., 1973.

訳者の補註

記　号

集合の概念及び，数箇所で用いられる超限順序数及び超限帰納法については，Bourbaki〔81〕，中山〔256〕等を参照されたい．

第 2 章

§8　本書の如く 1 点が閉集合であることを要求する位相空間を T_1 空間という．これを要求しない位相空間を T 空間といい，T 空間から出発することも多い．中山〔256〕参照．

§**16**　次元論一般及び定理 8 の証明については〔39〕の外 Hurewicz-Wallmann〔172〕，森田〔238〕等を参照．定理 8 に関しては安倍〔48〕にもいわゆる Sperner の補助定理による簡単な証明が紹介されている．

第 3 章

§**19**，**I**）の中で G の局所コンパクト性に関する部分は H がコンパクトでなくても，局所コンパクトであれば成立する．即ち G/H 及び H が局所コンパクトならば，G が局所コンパクトとなる．Gleason〔138〕 p. 87 参照．

§**20** に示されているように，位相群の間の代数的準同型写像は連続であるだけでは，同型定理が成立せず，開写像であることが必要である．そこで Bourbaki〔80〕，Weil〔46〕等では，開かつ連続な代数的準同型写像のみを homomorphism，単に連続な準同型写像を représentation と呼んでいる．§**20**，**G**)，位相群については第二同型定理 $HN/N \cong H/H \frown N$ は必らずしも常に成立しないことは注意を要する．G)はそれが成立つための一つの十分条件を与えるものであるが，他の簡単な十分条件として，G，H は任意でも，N がコンパクトならよいことが知られている．Weil〔46〕 p. 17 参照．

§**20**，例 37 は G がコンパクトでなくても，G：局所コンパクト，G/G_0：コンパクト（G_0：G の単位元連結成分）ならば成立つ．Montgomery-Zippin〔237〕 p. 58 参照．

§**21**，例 40 にある Cantor の完全集合 K とは 3 進法による小数展開に数字 1 が現われないような閉区間〔0, 1〕の点の全体より成る集合である．K の各点 t に $\frac{1}{2}t$ を対応させれば，K と同相な集合 K_1 が得られ，K_1 は 3 進法の小数展開が数字 0 と 1 のみより成る．K は 0, 1 の 2 点よりなる Hausdorff 空間の可算箇の直積空間と同相で，コンパクトな完全不連結集合である．

§**22**, 定理 15 は N がディスクリートでなくても，完全不連結ならば成立つ．そのとき任意の $n\in N$ を固定し，$x\in G$ に対し $xnx^{-1}\in N$ を対応させる写像による G の像を考えれば，それは完全不連結な N の連結部分集合だから，1点 n より成る．従って任意の x と n が可換となる．

第 4 章

§**26** に述べた典型連続体はいずれも賦値(valuation)を有する体であり，§26 に与えたその位相は賦値による位相と一致する．賦値の面からこれらの体を扱うことは，特に数論で重要である．完備な賦値体としてのこれらの体の特徴づけについては Hasse〔163〕を参照．

§**27**, 定理 22 については N. Jacobson〔187〕をも参照．

第 5 章

一般の局所コンパクト群に関する不変測度(Haar 測度)の存在その他については，淡中〔290〕，Halmos〔148〕，Loomis〔213〕，Weil〔46〕等を参照．

リー群上の不変積分は不変微分式によって得られる．Chevalley〔103〕第5章参照．

§**33**, 定理 33 はユニタリ表現論からも得られる．〔137〕と〔177〕の結果を合わせればよい．

§**33**, 例 60, 概周期函数に関しては，淡中〔290〕，Maak〔214〕等を参照．

第 6 章

§ **36** の基本アーベル群については Bourbaki〔80〕(とくに第7章)に詳しい．

§**38**, 例 60 の群 G については，Kurosh〔20〕p. 219 を参照．

§**39**, 例 69 により連結局所コンパクト・アーベル群はその極大コンパクト部分群とベクトル群の直和となる．アーベル群でない一般の連結局所コンパクト群 G は，このように群としての直積には分解しないが，G は極大コンパクト部分群 B と Euclid 空間と同相な部分集合 E の直積空間と同相になる．岩沢〔184〕及び〔315〕参照．

§**40**, 定理 52 は通常 Pontrjagin の双対定理といわれている．この定理は，局所コンパクト・アーベル群上の調和解析からも得られる．Cartan-Godement〔99〕，Loomis〔213〕，Raikov〔266〕，三村〔234〕，淡中〔290〕〔291〕，等を参照．

第 8 章

§**48**, 例 83 の問題は長野〔253, 定理 2〕によって肯定的に解決された．

第10章

§**55**, 定理 85 の十分条件の証明は，例えば河田〔192〕，p. 109, 岩堀〔180〕p. 61, 62 参照．(Chevalley〔103〕，岩堀の言葉で言えば) この定理は次のように言える．Euclid

空間のある領域における分布がその各点を通る積分多様体を持つためには，それが包含的なことが必要かつ十分である．Chevalley〔103〕はさらに，包含的な分布に対し，積分多様体の大局的な存在と一意性をも示した．これがリー群論の大局的な構成の基礎となる定理である．

§**59**，定理 95 は，単連結な可解リー群の構造を与えるものである．単連結と限らぬ一般の可解リー群 G の構造については Chevalley〔101〕参照．この場合とくに G はある次元のトーラスと Euclid 空間の直積と同相である．

§**58**，例 100．連結でないリー群 G が単純であるとは，その単位元の連結成分が単純（§**19**，**D**）参照）であることをいう．これは G のリー代数が単純（§**53**，**A**）参照）というのと同じである．訳註で述べたように $G_2{}^4$（の単位元成分）は単純ではない．$G_2{}^4$ は $(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2-(x_4)^2$ を不変にする1次変換の全体である．今 $y_1=x_1+x_3$，$y_3=x_1-x_3$，$y_2=x_2+x_4$，$y_4=x_2-x_4$ なる変数変換をすれば，$G_2{}^4$ は $y_1y_3+y_2y_4$ を不変にする1次変換の群となる．従ってそのリー代数 $\mathfrak{g}_2{}^4$ は

$$B=\left(\begin{array}{c|c} O & E_2 \\ \hline E_2 & O \end{array}\right)$$

（E_2 は2次の単位行列）

とするとき ${}^tXB+BX=0$ をみたす4次の実行列 X の全体である．従って $\mathfrak{g}$ の元 X の一般の形は

$$X=\left(\begin{array}{cc|cc} a & c & o & g \\ d & b & -g & 0 \\ \hline o & k & -a & -d \\ -k & o & -c & -b \end{array}\right)$$

となる．ここで a, b, c, d, g, k は任意の実数である．

この X を $X=(a, b, c, d, g, k)$ で表わす．これに対し

$$h_1=(1, -1, 0, 0, 0, 0) \quad e_{\alpha 1}=(0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad e_{-\alpha 1}=(0, 0, 0, 1, 0, 0)$$
$$h_2=(1, 1, 0, 0, 0, 0) \quad e_{\alpha 2}=(0, 0, 0, 0, 1, 0) \quad e_{-\alpha 2}=(0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

とおくとき，h_i, e_{α_i}, $e_{-\alpha_i}$ から生成される部分代数 $\mathfrak{g}_i (i=1, 2)$ は $\mathfrak{g}_2{}^4$ のイデアルで，$\mathfrak{g}_2{}^4$ は $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の直和となる．従って $\mathfrak{g}_2{}^4$ は単純ではない．$\mathfrak{g}_i$ は共に行列式1の2次の実行列の作るリー群のリー代数と同型であることが判る（従ってそれは $G_1{}^3$ のリー代数とも同型である）．これに対し $G_1{}^4$ の単位元成分 G が単純であることはリー代数の考察からも知れるが，次のようにしてもよい．今 H を行列式1の2次の複素行列全体の作る群とする．

$$q=\begin{pmatrix} x_3+x_4 & ix_1-x_2 \\ ix_1+x_2 & x_3-x_4 \end{pmatrix}$$

とし，$a\in H$ に対し，a^* でその共役転置行列を表わす；$a^*={}^t\bar{a}$. 今 $q\to q'=aqa'$ なる変換を考えると，これは変数 x_1, x_2, x_3, x_4 の間の実1次変換 $\varphi(a)$ を引起す．そして $\det q=(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2-(x_4)^2$, $\det q=\det q'$ 故 $\varphi(a)$ は $G_1{}^4$ に属す．このとき $a\to\varphi(a)$ は H から G の上への準同型写像で，核は $\pm e$(e は単行行列)から成ることが判る．従って G は複素単純リー群 H と局所同型であり，従って単純リー群である．一般に複素単純リー代数 S を実リー代数と見た(S)は実単純リー代数である．また実単純リー代数 R の複素化〔R〕が複素単純リー代数でないのは，ある複素単純リー代数 S が存在して，$R=(S)$となるときで，またそのときに限る．但し一次元のものを除く．

第 11 章

§**61**, 定理 103 に与えられた実リー代数 R がコンパクトとなるための条件は，随伴群で不変な正値2次形式 Q の存在であった．Q は R のいわば"外"にあるものであるが，これに対し R の"内"にあるもので，コンパクトとなる条件を与えることもできる．またこれを用い，コンパクト群と局所同型な連結リー群または局所コンパクト群の特徴づけもできる．これらについては杉浦〔286〕参照．

§**62**, 定理 104 から明らかに，コンパクト・リー代数 R の正則部分代数は R の極大可換部分代数であるが，実はこの逆も成立つ．コンパクトと限らぬ一般のリー代数についても，正則部分代数については，種々の同値な定義が知られている．松島〔224〕，岩堀-佐武〔181〕，Chevalley〔108〕t. Ⅲ等を参照．

§**63**, 定理 107 はコンパクト準単純リー代数の自己同型群の単位元成分について述べられているが，その証明は適当に修正すれば一般の連結なコンパクト・リー群に対して通用する．すなわち次の定理が成立つ．

任意の連結コンパクト・リー群 G の任意の極大連結可換部分群 H(＝極大トーラス部分群)を一つ取ったとき，G の任意の元は H のある元と共役である．

この定理はコンパクト群に関する最も基本的な定理であって，これにより，コンパクト・リー群の多くの問題が，その極大トーラス部分群に関する問題に帰着させられる．この定理は次の二つの命題 a) と b) を併わせたものと同値である．

a) G の任意の二つの極大トーラス部分群は共役である．

b) G の任意の元はある一つの極大トーラス部分群に含まれる．

b) はまた b′) G の各元はある一つの1径数部分群に含まれる，とも同値である．a) については Hunt〔171〕の簡単な証明がある．b′) の証明としては，G を不変な metric に関する Riemann 空間と考えて，任意の2点が測地線で結べることによる証明(例えば〔323〕exposé 23 参照)および Hopf〔168〕の巾(べキ)写像 $p_k(x)=x^k$ の写像度による証明

がある．また Chevalley〔108〕は algebraic group に関する代数幾何学的考察を利用して b) を証明した．定理 108 も上の a)，b) と同様な二つの命題 a) b) に分けられる．ルートの不変性(定理 109) の証明には a) だけがあればよいが，それは簡単に証明される定理 107 の a)の部分のみから証明される．また定理 108，a) だけを代数的に証明することもできる．それには，代数的閉体上のリー代数の正則部分代数が共役であるという Chevalley の定理(松島〔224〕定理 5.5) を〔R〕に適用すればよい．定理 108 b) は正則部分代数の極大可換部分代数としての特徴づけから直ちに得られる．本書における定理 107 の証明は Weyl〔45〕によるもので最も直接的なものといえる．

定理 110 についても多くの証明がある．de Rham の定理と Cartan の不変微分式論により，準単純リー代数の 1 次元コホモロジー群が 0 であることに帰着させる方法(たとえば Chevalley-Eilenberg〔111〕) が一番筋が通っていると言えようが，その外 Harish-Chandra〔152〕の証明，Cartier〔323〕のユニタリ表現論の応用する証明と Samelson〔271〕の測地線による証明など多くの興味ある証明が知られいる．

§66, 例 109　任意の σ 系 Σ がある準単純リー代数のルート系となっていることを本文の如くして検証することは決して容易ではない．これに対し Harish-Chandra〔153〕は，例 110 に現われる超平面 $(\alpha, x)=0$ に関する対称変換 $S_\alpha(\alpha \in \sum)$ の生成する有限群 W(Weyl 群と呼ばれる)を特徴づける定理を証明した．この定理によれば，任意の σ 系がある準単純リー代数のルート系となることが直ちに証明される．ただしこの定理そのものの証明はかなり長い．これは松島〔224〕p. 136 に紹介されている．

例外リー群を直接に構成することに関しては，現在まとまった著述がないが，Freudenthal〔126〕等が基本的であろう．Chevalley が現在未刊の彼のリー群論の第 4 巻または第 5 巻において，これに触れることを期待したい．例外リー群は non-associative algebra，特に Cayley(-Dickson) algebra A と関係が深い．例えば G_2 は A (8 次元の non-associative な division algebra)の自己同型群であり，F_4 は A の元を要素とする 3 次のエルミット行列の作る 27 次元の simple Jordan algebra の自己同型群である．E 型の群は A の上の射影平面の変換群として構成される．Freudenthal〔128〕〔129〕を参照．その他例外リー群あるいはリー代数については，Chevalley〔106〕〔107〕，Chevalley-Schafer〔112〕，Jacobson〔188〕〔189〕，松島〔222〕，Tits〔292〕〔293〕〔294〕等を見られたい．

Schafer〔365〕は，例外リー環の構成に対する入門書としても適当である．σ 系からのリー代数の構成については Serre〔366〕に見通しよく述べられている．

文献についての補註

本書を読まれた上で，さらに連続群について，深く知りたいと思われる方には，次のような著書がある．

局所コンパクト群の上の解析については Weil〔46〕が今でも最もすぐれた本であろう．リー群については Chevalley〔103〕が最も基本的な本である．岩堀〔180 のⅠ〕と併わせて読まれると便利であろう．これは大体一般論であるが，さらに立入った構造や表現論については〔323〕がまとまっている．リー代数については，松島〔224〕，岩堀〔180 のII〕の二つのすぐれた本がある．

リー群に関する，さらに詳しい知識(個々の単純群についての詳論など)を得るには E. Cartan および H. Weyl の著作を読むべきである． Cartan のリー群に関する論文はすべて，全集の第一部に収められている．Weyl では〔45〕または〔310〕と〔311〕を見ればよい．

表現論 準単純リー代数の表現論の古典である Cartan〔85〕，Weyl〔45〕の内容は近年いくつかの重要な整理がなされた．すなわち Cartan〔85〕による既約表現の存在定理は Harish-Chandra〔153〕により，また Weyl〔45〕の指標と次元の公式は Freudenthal〔127〕により，明快な証明が与えられた．これは松島〔224〕，および Séminaire S. Lie〔323〕に紹介されている．なお小平〔198〕および佐武〔274〕もある．なお複素典型リー代数の基本既約表現の構成は岩堀〔180, II〕にまとめられているのが便利である．また典型リー群のテンソル表現を既約成分に分解する問題は Weyl〔308〕〔311〕により解かれた．特殊および一般線型群の場合は岩堀〔180〕，弥永-杉浦〔186〕に紹介されている．

後藤〔144〕による線型リー群の特徴づけ，すなわち同型表現が存在するための条件も興味ある結果である．

なお Borel-Weil〔75〕はコンパクト準単純リー群の表現論と代数幾何学との関係を見出したもので，表現論の新生面を開いたものといえよう．彼等はこの立場から代数多様体の上の Riemann-Roch の定理から Weyl の次元公式が導かれると述べており，注目に価する．

またリー群のユニタリ表現についても近年多くの研究がある．Bargmann〔54〕，Gelfand-Naimark〔135〕ではそれぞれ $SL(2, R)$，$SL(2, C)$ の既約ユニタリ表現が構成され，それらにより，既約なものが尽されることが示されている．複素典型リー群の既約ユニタリ表現の構成は Gelfand-Naimark〔136〕にまとめられている．ここで挙げられ

たものに尽きることは Naimark〔254〕にある．これに対し Harish-Chandra は〔154, 155 の II〕で任意の半単純リー群に対して，既約表現を与える規準的な方法を与え，〔155 の III〕で指標を定義し〔158〕でその形を定め，〔156〕で複素準単純リー群に対して，Plancherel の定理の拡張を証明し，〔157 のⅣ〕では square integrable 表現の formal degree なるものを定義し，それがコンパクトの場合の Weyl の次元公式と同様の形をしていることを示すなど，多くの結果を得た．

局所コンパクト群のユニタリ表現については Gelfand-Raikov〔137〕，Godement〔141〕以来多くの論文がある．とくに Mackey の誘導表現の理論〔216〕などは興味あるものであろう．なおユニタリ表現論の綜合報告としては Mackey〔215〕，Gelfand〔132〕，Berezin-Gelfand 他〔55〕，Singer〔281〕がある．

また淡中〔289〕によるコンパクト群の双対定理は淡中〔290〕〔291〕に詳しい．この定理は Chevalley〔103〕(第 6 章) によりリー群の場合に深められた．Mostow-Hochshild〔249〕はその拡張を扱っている．

群および均質空間のトポロジー　これに対しては，Samelson〔272〕および Borel〔66〕の二つのすぐれた綜合報告があるから，これを見られたい．Hopf〔167〕，Borel〔63〕，Chevalley〔105〕，Leray〔211〕，Bott〔76〕等は基本的なものであろう．なお Betti 数を実際求めることは，典型リー群については Brauer (Weyl〔311〕にある)，Samelson〔270〕，Pontrjagin〔265〕，Dynkin〔118〕により，例外リー群については Borel-Chevalley〔69〕，Bott〔76〕により実行された．またコンパクトな既約対称 Riemann 空間の Betti 数は岩本〔182〕で求められた．なお Torsion，ホモトピー群および Characteristic class についても種々の結果が知られている．〔66〕などを見られたい．

以上，大体コンパクト・リー群のみを扱っているが，その根拠は第 6 章補註に述べた岩沢〔184〕の分解定理にある．均質空間でも nilpotent リー群の場合 (Malcev〔219〕，松島〔221〕) および特殊な可解群(斎藤〔269〕)ではコンパクトな均質空間と Euclid 空間の直積となるが，一般にはこのような分解は不可能である．このため Mostow〔245〕は均質空間の適当な fibering を考えている．

なおコンパクト準単純リー群の基本群を定めるいわゆる Stiefel の図形については Cartan〔87〕Stiefel〔283〕，Dynkin-Oniščik〔122〕等を参照されたい．

微分幾何学とリー群論とは多くの点で接触する．基本的な概念である接続については野水〔261〕，ホロノミー群については Lichnerowicz〔212〕等がある．なお運動群，アフィン変換群，共形変換群等がリー群になることについては小林〔196〕の方法が統一的である．また群多様体上の幾何については Cartan〔86〕，〔87〕がある．均質空間上の不変

アフィン接続は野水〔259〕により明快に基礎づけられた．

対称 Riemann 空間の理論は，準単純リー群の理論と極めて密接な関係にある．とくにその分類の理論は実単純リー代数の分類とほとんど同値である．Cartan〔7〕,〔8〕及び伊勢-杉浦-斎藤〔175〕参照．Cartan の全集の第1部第2巻の諸論文は大部分対称 Riemann 空間の理論と関連するが，最初〔91〕,〔8〕などの綜合報告を読まれた後に〔88〕などに進まれるのが便利であろう．対称 Hermite 空間（松島〔223〕参照）を含む均質 Kähler 空間は最近，多くの人の興味を惹くようになった．これに対しては松島〔227〕の綜合報告および Borel〔64〕，松島〔225〕〔226〕，松島-埴野〔228〕などを見られたい．特に複素空間の均質有界領域についてはCartan〔93〕による基本的な結果に対し，いくつかの重要な寄与が行われた．とくに Harish-Chandra〔157 のVI〕はコンパクトでない既約対称 Hermite 空間はすべて対称有界領域として実現されることの一般的な証明を与えた．また均質有界領域はすべて対称ではないかという Cartan の問題は Borel〔64〕及び Koszul〔207〕により，解析変換の準単純リー群が推移的に作用している場合に肯定的に解決され，その結果は unimodular 群の場合にまで埴野〔149〕により一般化された．しかし〔332〕において対称でない，5次元均質有界領域の例が作られた．

Hilbert の第5問題は，Gleason〔11〕，Montgomery-Zippin〔29〕の解決後，山辺〔314〕〔315〕は Gleason の方法を改良して，任意の局所コンパクト群が generalized Lie group になることを示し，これにより，リー群と局所コンパクト群の間の関係を完全に明らかにした．Montgomery-Zippin の著書〔237〕はこの山辺の結果までを詳しく述べている．またこの本には変換群に関する多くの結果と詳しい文献表がのっている．第5問題に関する綜合報告としては〔140〕もある．

物理学における応用 連続群論の物理学における重要な応用としては，原子又は原子核の問題に対する回転群の表現論の応用と，素粒子論における Lorentz 群の表現論の応用がある．前者に関しては，山内〔316〕，山内-堀江〔317〕，犬井-柳川〔173〕，Rose〔267〕などを参照されたい．また後者に関しては Laporte-Uhlenbeck〔210〕，Pauli〔264〕，van der Waerden〔299〕，梅沢〔297〕〔298〕，および湯川-小林〔322〕の項目 D, E などを見られたい．

この文献追加を作るに際しては，多くの人たちから御援助を受けた．とくに素粒子論に対する応用に関する欧語の文献は梅沢博臣氏の御教示による．これらの方々に厚く感謝する次第である．（杉浦）

索　　引

キ

ク

ケ

コ

サ

シ

ス

セ

連続群論 下（全二冊）

1958年5月19日　第1刷発行 ©
1979年2月20日　第16刷発行

¥1700

訳　者　柴岡泰光（しばおかやすみつ）
杉浦光夫（すぎうらみつお）
宮崎功（みやざきいさお）

発行者　緑川亨

〒101 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
発行所　株式会社 岩波書店
電話 03-265-4111
振替 東京 6-26240

印刷・精興社　製本・牧製本

落丁本・乱丁本はお取替いたします

極限論と集合論	能代　清著	A 5	174頁 定価 1400円
代数函数論 増補版	岩澤健吉著	A 5	388頁 定価 1600円
函数解析の基礎 第2版	コルモゴロフ他著 山崎三郎訳	A 5	498頁 定価 2300円
解析概論（改訂第3版）	高木貞治著	B 5	494頁 定価 2500円
群論（全2冊）	鈴木通夫著	上 下	3800円 5000円
位相解析の基礎	吉田・河田・岩村著	A 5	484頁 定価 2800円
位相解析入門	入江昭二著	A 5	292頁 定価 1700円

岩波書店刊